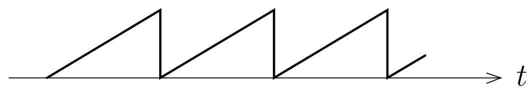
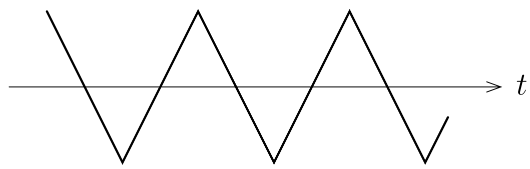
1 章演習問題略解

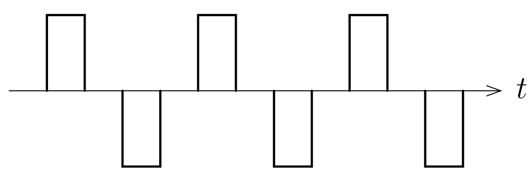
1.1　周期信号の 3 例を解図 1.1(a)，(b)，(c) に示す．また孤立信号の 3 例を解図 1.1(d)，(e)，(f) に示す．



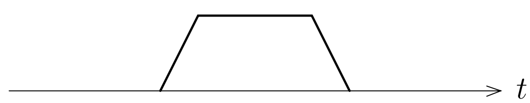
解図 1.1(a) 周期信号：のこぎり波



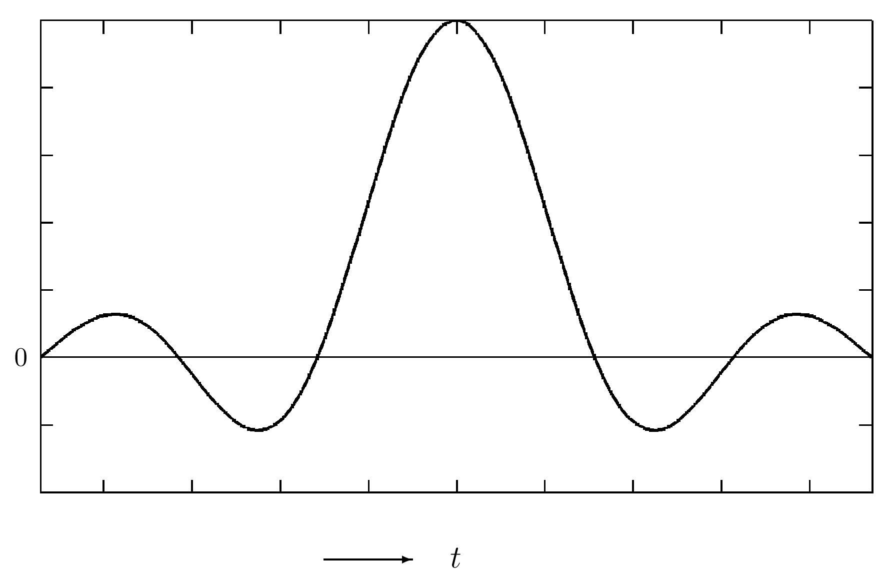
解図 1.1(b) 周期信号：三角波



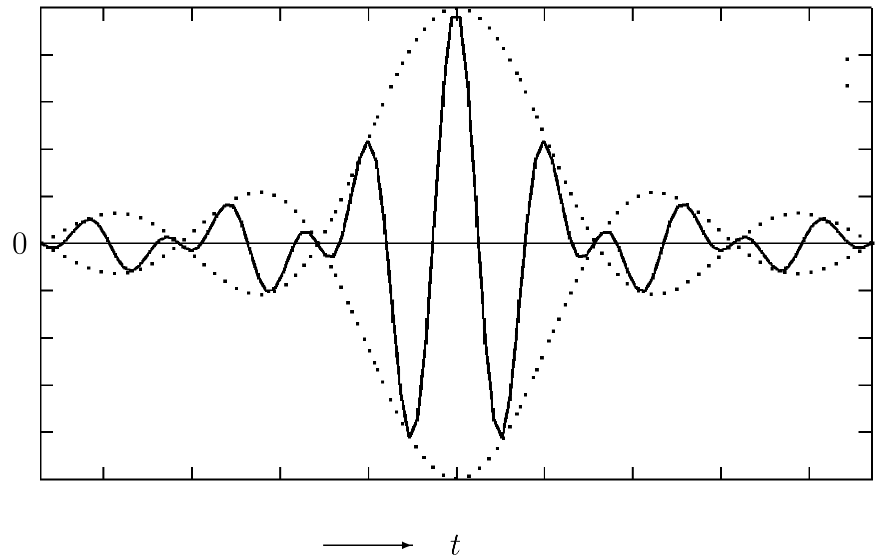
解図 1.1(c) 周期信号：両極性方形パルス



解図 1.1(d) 孤立信号：台形パルス



解図 1.1(e) 孤立信号：直線位相低域フィルタのインパルス応答



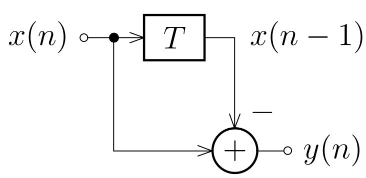
解図 1.1(f) 孤立信号：直線位相帯域フィルタのインパルス応答

1.2　$\boldsymbol{y} = H\boldsymbol{x}$ を具体的に書くと次のようになる．

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ y(-1) \\ y(0) \\ y(1) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ x(-2) \\ x(-1) \\ x(0) \\ x(1) \\ \cdot \end{bmatrix}$$

各行の主対角項とその左に隣接する項が 0.5 で，その他の項はすべて 0 .

1.3　解図 1.3 参照.



解図 1.3

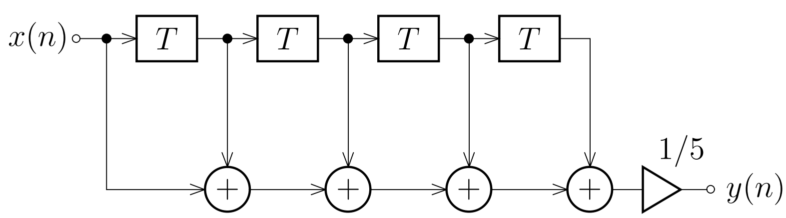
1.4　移動平均

	n	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
(a)	$x(n)$	$\cdots$	1	1	1	1	1	$\cdots$
	$y(n)$	$\cdots$	1	1	1	1	1	$\cdots$
(b)	$x(n)$	$\cdots$	1	-1	1	-1	1	$\cdots$
	$y(n)$	$\cdots$	0	0	0	0	0	$\cdots$

移動差分

	n	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
(a)	$x(n)$	$\cdots$	1	1	1	1	1	$\cdots$
	$y(n)$	$\cdots$	0	0	0	0	0	$\cdots$
(b)	$x(n)$	$\cdots$	1	-1	1	-1	1	$\cdots$
	$y(n)$	$\cdots$	2	-2	2	-2	2	$\cdots$

1.5 解図 1.5 参照.



解図 1.5

1.6 サンプリング周波数を f_s とする.

電話信号： $2 \times 3.4 = 6.8$ であるから f_s は 6.8 kHz 以上.

テレビジョン信号： $2 \times 4.2 = 8.4$ であるから f_s は 8.4 MHz 以上.

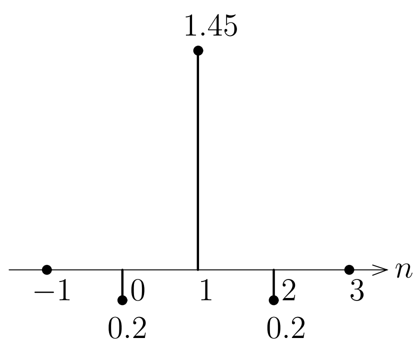
2 章演習問題略解

2.1

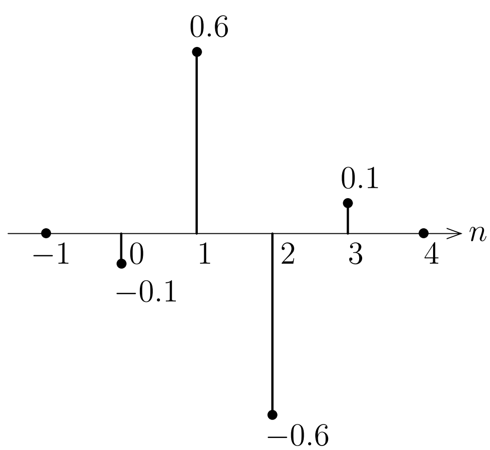
	線形	時不変
(a)	○	○
(b)	×	○
(c)	○	×
(d)	○	×
(e)	×	○

Yes：○　No：×

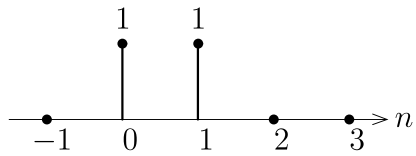
2.2　解図 2.2(a)，(b)，(c)，(d) 参照.



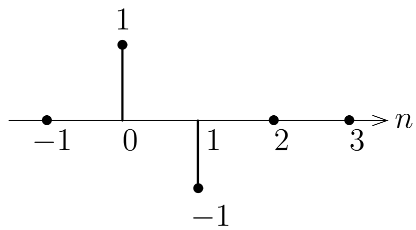
解図 2.2(a)



解図 2.2(b)

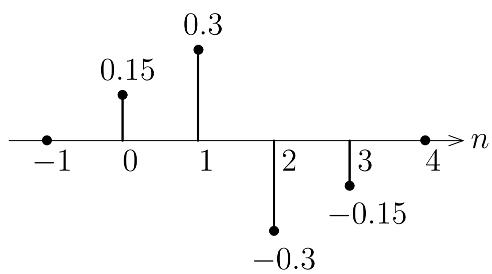


解図 2.2(c)

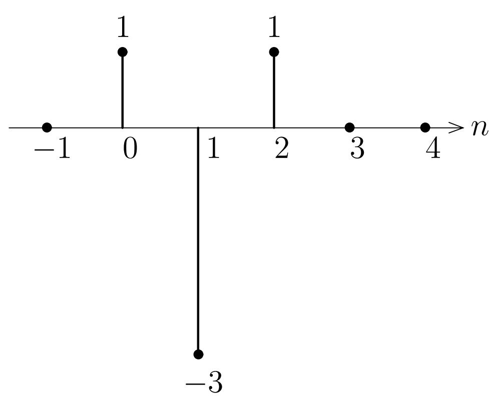


解図 2.2(d)

2.3　解図 2.3(a)，(b) 参照.

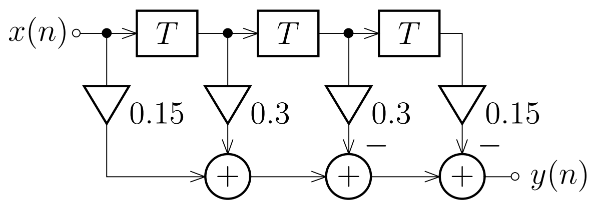


解図 2.3(a)

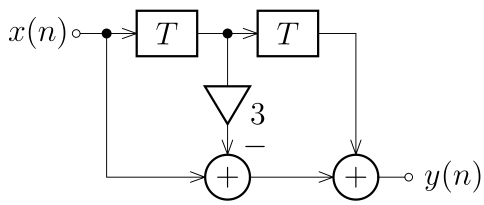


解図 2.3(b)

2.4　解図 2.4(a)，(b) 参照.

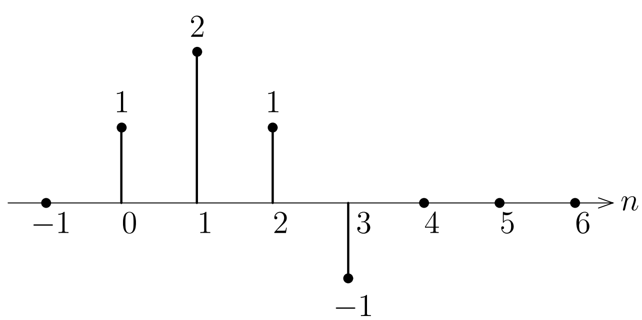


解図 2.4(a)

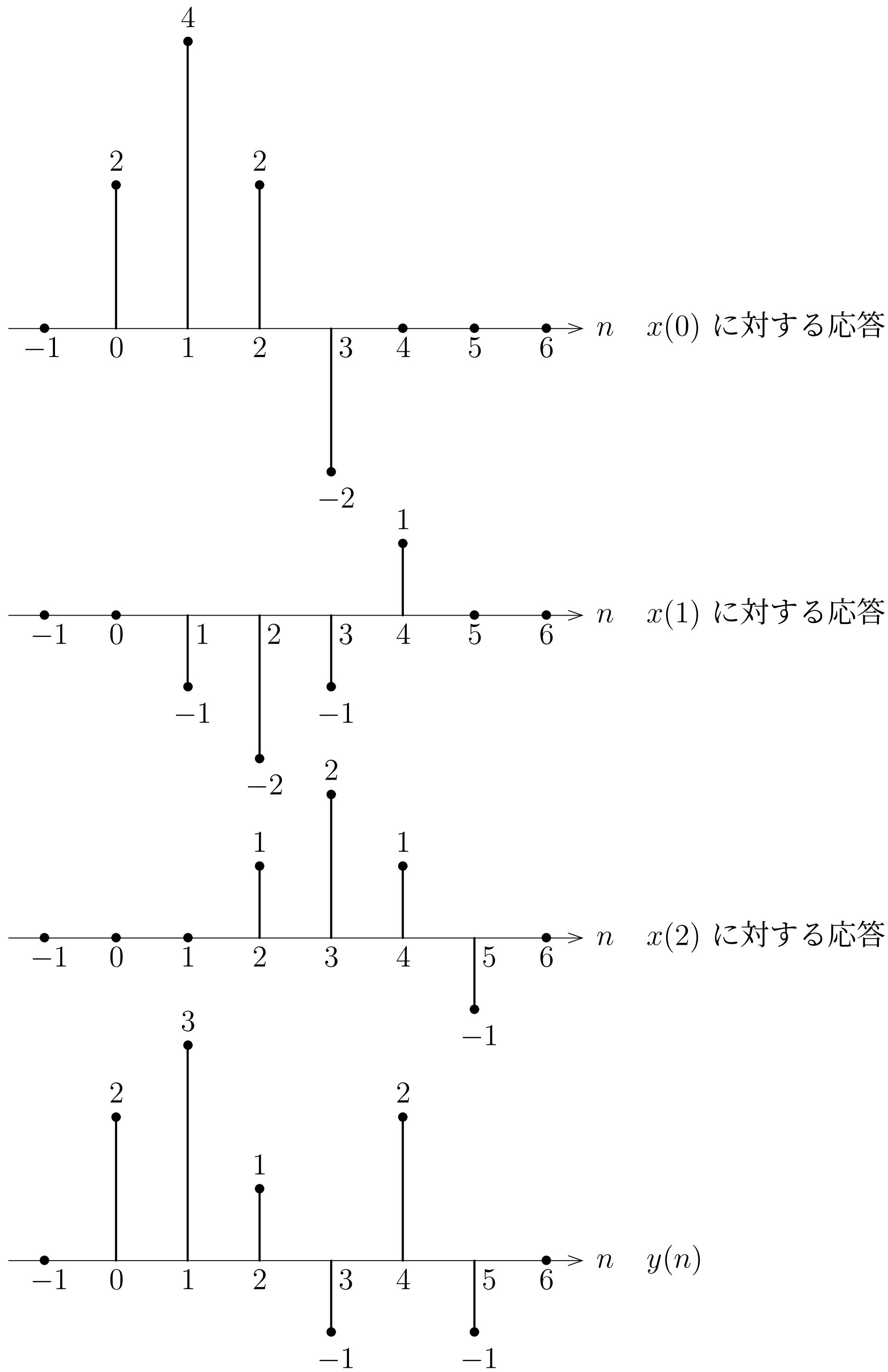


解図 2.4(b)

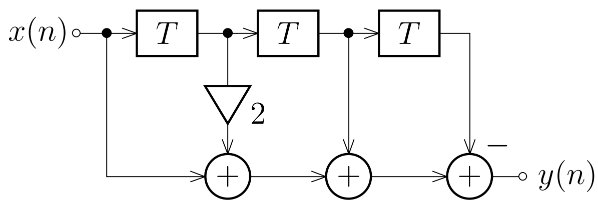
2.5　解図 2.5(a)，(b)，(c) 参照.



解図 2.5(a) インパルス応答



解図 2.5(b)

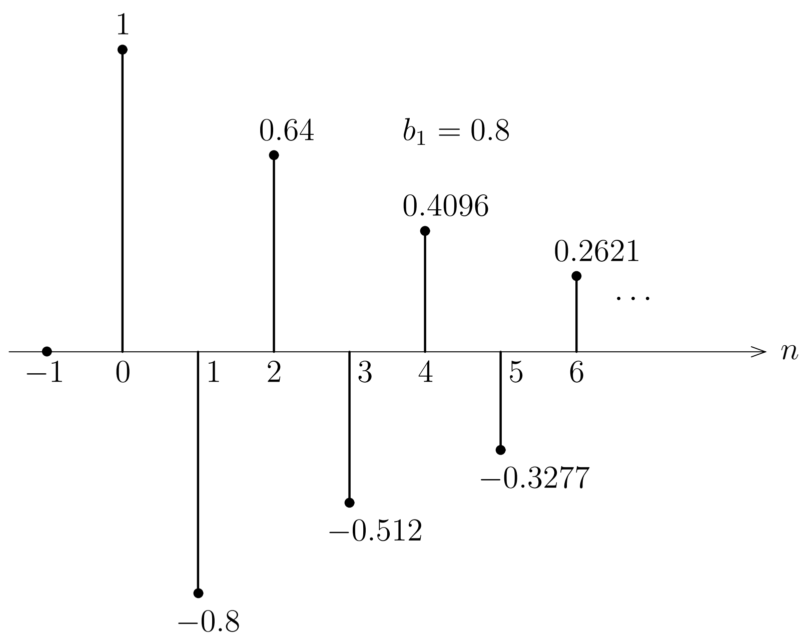


解図 2.5(c)

2.6

時点番号 n	0	1	2	3	4
$h_{a_0}h_{b_n}$ $+h_{a_1}h_{b_{n-1}}$ $+h_{a_2}h_{b_{n-2}}$	$h_{a_0}h_{b_0}$	$h_{a_0}h_{b_1}$ $+h_{a_1}h_{b_0}$	$h_{a_0}h_{b_2}$ $+h_{a_1}h_{b_1}$ $+h_{a_2}h_{b_0}$	$h_{a_1}h_{b_2}$ $+h_{a_2}h_{b_1}$	$h_{a_2}h_{b_2}$
$y(n)$	$y(0)$	$y(1)$	$y(2)$	$y(3)$	$y(4)$

2.7　解図 2.7 参照.



解図 2.7

2.8 **(a)** $y(n) = x(n) + 0.8x(n-1) + 0.5y(n-1)$ において $x(n)$ に単位インパルス $\delta(n)$ を入力したとき，すなわち $x(n) = \delta(n)$ のときの応答 $y(n)$ を $h(n)$ で表すと，インパルス応答 $h(n)$ は $h(n) = \delta(n) + 0.8\delta(n-1) + 0.5h(n-1)$ と表すことができる．ところで

$$\delta(0) = 1$$
$$\delta(-1) = \delta(-2) = \cdots = 0$$
$$\delta(1) = \delta(2) = \cdots = 0$$
$$h(-1) = 0$$

であるから

$$h(0) = \delta(0) = 1$$
$$h(1) = 0.8\delta(0) + 0.5h(0) = 0.8 \times 1 + 0.5 \times 1 = 1.3$$
$$h(2) = 0.5h(1) = 0.65$$
$$h(3) = 0.5h(2) = 0.325$$

よって， $n \geq 2$ に対して

$$h(n) = 0.5^{n-1} \times 1.3$$

(b) $y(n) = x(n) - 0.5x(n-1) + 0.25x(n-2) - 0.5y(n-1)$ において $x(n)$ に単位インパルス $\delta(n)$ を入力したとき，すなわち $x(n) = \delta(n)$ のときの応答 $y(n)$ を $h(n)$ で表すと，インパルス応答 $h(n)$ は $h(n) = \delta(n) - 0.5\delta(n-1) + 0.25\delta(n-2) - 0.5h(n-1)$ と表すことができる．ところで

$$\delta(0) = 1$$
$$\delta(-1) = \delta(-2) = \cdots = 0$$
$$\delta(1) = \delta(2) = \cdots = 0$$
$$h(-1) = 0$$

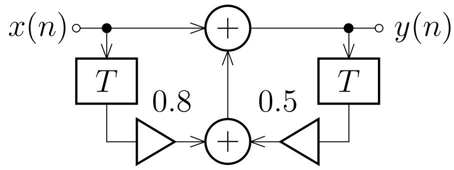
であるから

$$h(0) = \delta(0) = 1$$
$$h(1) = -0.5\delta(0) - 0.5h(0) = -0.5 \times 1 - 0.5 \times 1 = -1$$
$$h(2) = 0.25\delta(0) - 0.5h(1) = 0.25 \times 1 - 0.5 \times (-1) = 0.75$$
$$h(3) = -0.5h(2) = -0.5 \times 0.75 = -0.375$$
$$h(4) = -0.5h(3) = -0.5 \times (-0.375) = 0.1875$$

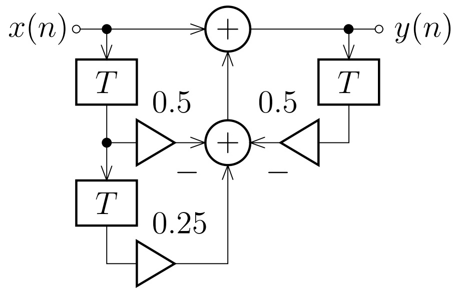
よって， $n \geq 3$ に対して

$$h(n) = (-0.5)^{n-2} \times 0.75$$

2.9　解図 2.9(a)，(b) 参照.



解図 2.9(a)



解図 2.9(b)

2.10 (a) $y(n) = x(n)+0.8x(n-1)+0.6y(n-1)-0.36y(n-2)$ において $x(n)$ に単位インパルス $\delta(n)$ を入力したとき，すなわち $x(n) = \delta(n)$ のときの応答 $y(n)$ を $h(n)$ で表すと，インパルス応答 $h(n)$ は $h(n) = \delta(n)+0.8\delta(n-1)+0.6h(n-1)-0.36h(n-2)$ と表すことができる．ところで

$$\delta(0) = 1$$
$$\delta(-1) = \delta(-2) = \cdots = 0$$
$$\delta(1) = \delta(2) = \cdots = 0$$

また，$y(-1) = y(-2) = 0$ より $h(-1) = h(-2) = 0$ であるから

$$h(0) = \delta(0) = 1$$
$$h(1) = 0.8\delta(0) + 0.6h(0) = 0.8 \times 1 + 0.6 \times 1 = 1.4$$
$$h(2) = 0.6h(1) - 0.36h(0) = 0.6 \times 1.4 - 0.36 \times 1 = 0.48$$
$$h(3) = 0.6h(2) - 0.36h(1) = 0.6 \times 0.48 - 0.36 \times 1.4 = -0.216$$

以下同様に計算して

$$h(4) = -0.3024$$
$$h(5) = -0.10368$$
$$h(6) = 0.046656$$

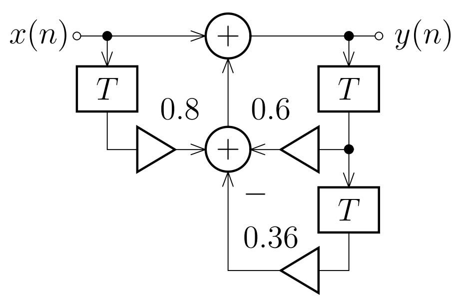
(b) $\{x(n)\} = 0$ より $y(n) = 0.6y(n-1) - 0.36y(n-2)$ となる．この式に初期条件 $y(-1) = 2$，$y(-2) = -1$ を代入するとにより， $y(n)$，$0 \leq n \leq 6$ は次のように求められる．

$$\begin{aligned} y(0) &= 0.6y(-1) - 0.36y(-2) = 0.6 \times 2 - 0.36 \times (-1) = 1.2 + 0.36 \\ &= 1.56 \\ y(1) &= 0.6y(0) - 0.35y(-1) = 0.6 \times 1.56 - 0.36 \times 2 = 0.936 - 0.72 \\ &= 0.216 \end{aligned}$$

以下同様に行って

$$\begin{aligned} &y(3) = -0.33696, \quad y(4) = -0.046656 \\ &y(5) = 0.093312, \quad y(6) = 0.0727834 \end{aligned}$$

(c) 解図 2.10 参照.



解図 2.10

2.11 図 2.5 より

$$y(n) = h_0x(n) + h_1x(n-1) + h_2x(n-2) + \cdots + h_Mx(n-M)$$

上式に $x(n) = \sin \omega nT$ を代入すると

$$\begin{aligned} y(n) &= h_0 \sin \omega nT + h_1 \sin\{(\omega n - \omega)T\} + h_2 \sin\{\omega n - 2\omega)T\} \\ &\quad + \cdots + h_M \sin\{\omega nM\omega)T\} \\ &= \sin \omega nT(h_0 + h_1 \cos \omega T + h_2 \cos 2\omega T + \cdots + h_M \cos M\omega T) \\ &\quad - \cos \omega nT(h_1 \sin \omega T + h_2 \sin 2\omega T + \cdots + h_M \sin M\omega T) \\ &= \sin \omega nTH_c(\omega) - \cos \omega nTH_s(\omega) \\ &= A(\omega) \sin\{\omega nT + \phi(\omega)\} \end{aligned}$$

ただし

$$
\begin{aligned}
H_c(\omega) &= h_0 + h_1 \cos \omega T + h_2 \cos 2\omega T + \cdots + h_M \cos M\omega T \\
H_s(\omega) &= h_1 \sin \omega T + h_2 \sin 2\omega T + \cdots + h_M \sin M\omega T \\
A(\omega) &= \sqrt{H_c^2(\omega) + H_s^2(\omega)} \\
\phi(\omega) &= -\tan^{-1}\left(\frac{H_s(\omega)}{H_c(\omega)}\right)
\end{aligned}
$$

3 章演習問題略解

3.1 **(a)**

$$X(z) = -0.5 + z^{-1} + 1.2z^{-2} + 0.3z^{-3} - 0.4z^{-4}$$

(b)

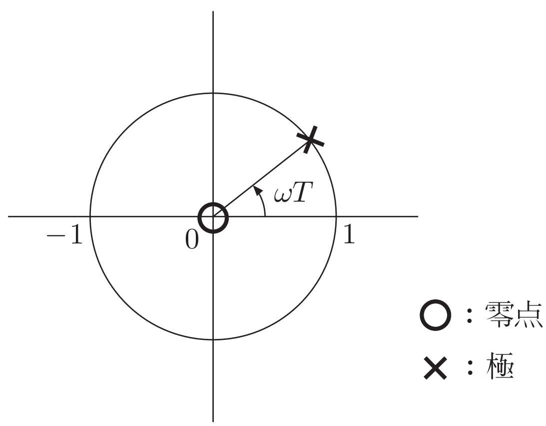
$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}}(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}) \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}}(1 - z^{-1} - 0.5z^{-1}(1 - z^{-1})) \\ &= 1 - 0.5z^{-1} \end{aligned}$$

(c) 表 3.1(6) において，$\alpha = 0$，$\omega T = \pi/4$ と置き，

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos\frac{\pi}{4}}{1 - 2z^{-1}\cos\frac{\pi}{4} + z^{-2}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

3.2

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{j\omega nT} \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{e}^{j\omega T} \cdot z^{-1})^n = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{j\omega T} \cdot z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - \mathrm{e}^{j\omega T}} \end{aligned}$$



3.3 **(a)**

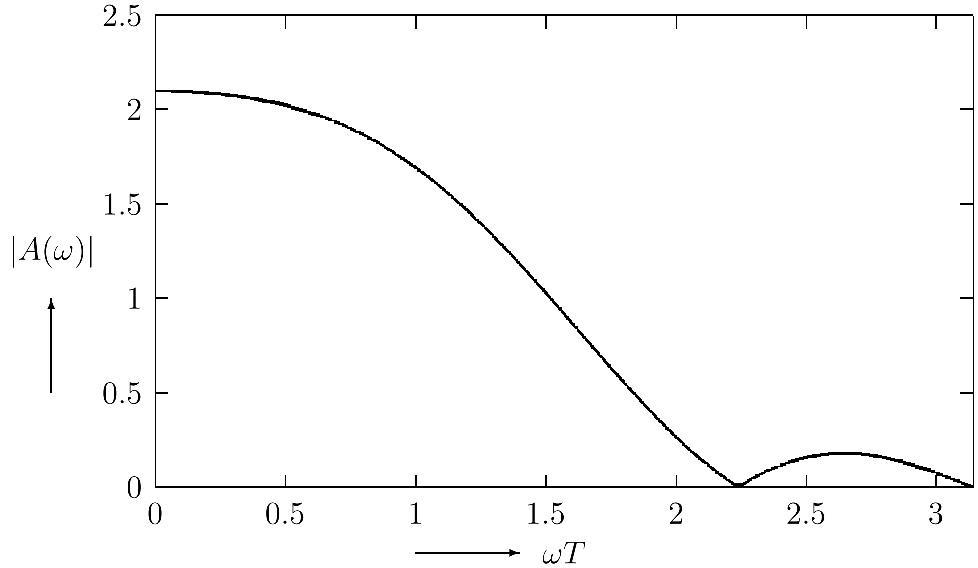
$$H(z) = 0.8 - 0.3z^{-1} + 0.1z^{-2}$$

(b)

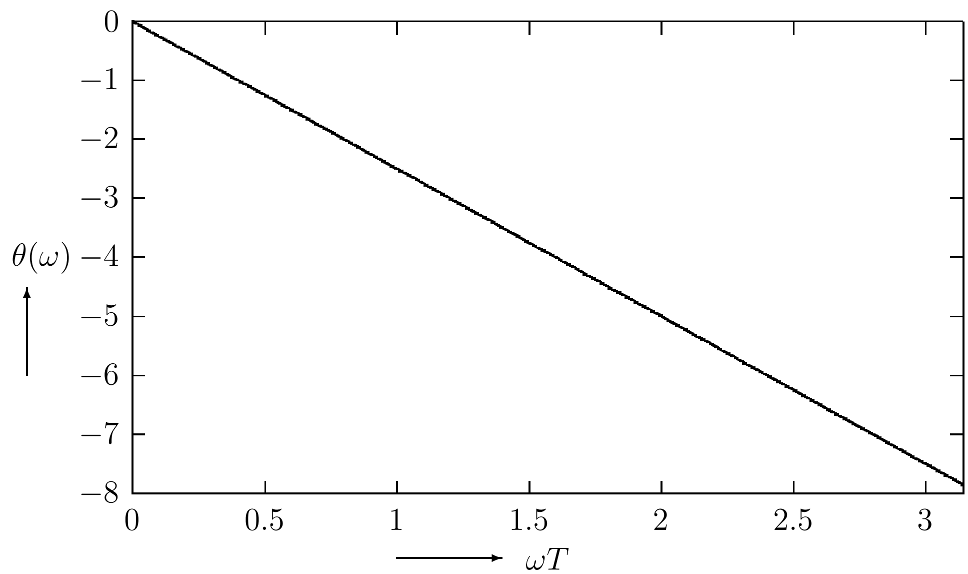
$$H(z) = \frac{1 + 1.5z^{-1} + 1.2z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

3.4 (a)

$$H(\omega) = \mathrm{e}^{-j\frac{5}{2}\omega T} \cdot A(\omega)$$
$$A(\omega) = 1.7\cos\frac{\omega T}{2} + 0.6\cos\frac{3\omega T}{2} - 0.2\cos\frac{5\omega T}{2}$$
$$\theta(\omega) = -\frac{5}{2}\omega T$$



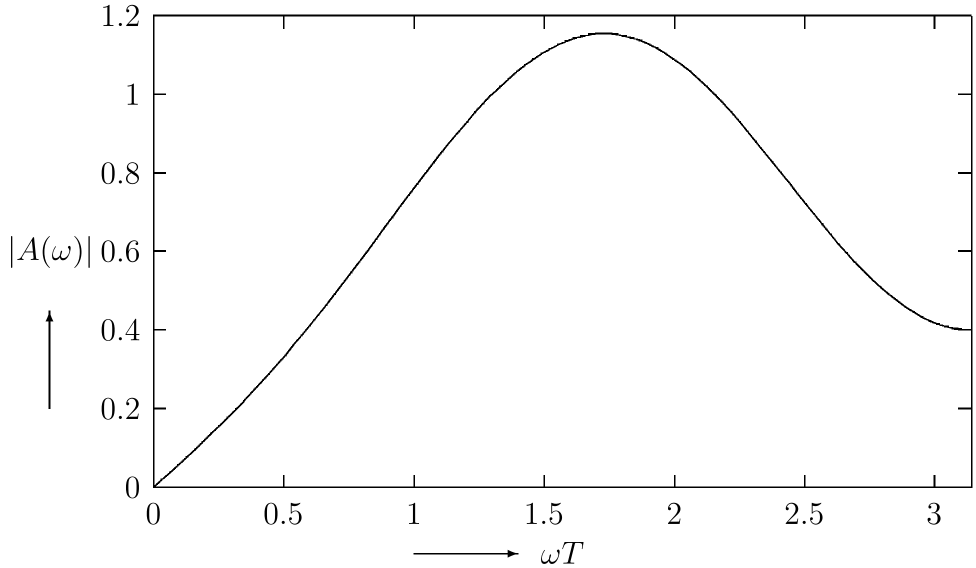
解図 3.4(a-1)



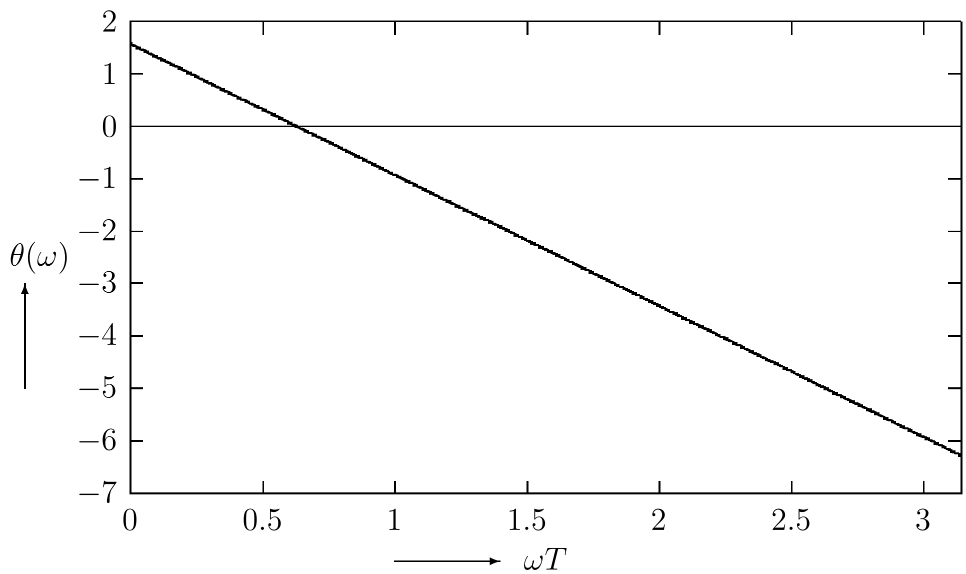
解図 3.4(a-2)

(b)

$$
\begin{aligned}
H(\mathrm{e}^{j\omega T}) &= \mathrm{e}^{-j\frac{5}{2}\omega T} \cdot jA(\omega) \\
A(\omega) &= -\sin\frac{\omega T}{2} - 0.4\sin\frac{3\omega T}{2} + 0.2\sin\frac{5\omega T}{2} \\
\theta(\omega) &= \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\omega T
\end{aligned}
$$



解図 3.4(b-1)



解図 3.4(b-2)

3.5 (a)

$$H(\omega) = \frac{z^2 + 1.5z + 1.2}{z^2 - 0.8z + 0.5}$$

零点：　$-0.75 \pm j0.798436$

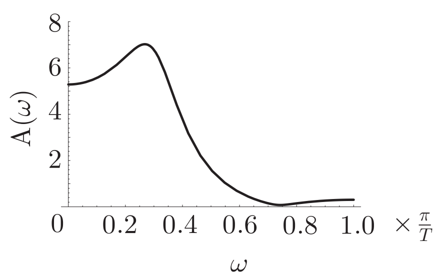
極：　$0.4 \pm j0.583095$

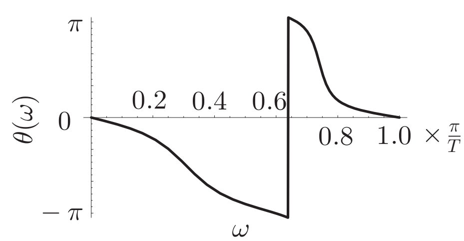
(b) 3.3(b) の解の $H(z)$ を用いる．

$$\begin{aligned} H(\mathrm{e}^{j\omega T}) &= \frac{(1 + 1.5\cos\omega T + 1.2\cos 2\omega T) - j(1.5\sin\omega T + 1.2\sin 2\omega T)}{(1 - 0.8\cos\omega T + 0.5\cos 2\omega T) - j(-0.8\sin\omega T + 0.5\sin 2\omega T)} \\ &\triangleq \frac{a - jb}{c - jd} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 + 1.5\cos\omega T + 1.2\cos 2\omega T)^2 + (1.5\sin\omega T + 1.2\sin 2\omega T)^2}{(1 - 0.8\cos\omega T + 0.5\cos 2\omega T)^2 + (-0.8\sin\omega T + 0.5\sin 2\omega T)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= \text{分子の位相} - \text{分母の位相} \\ &= -\tan^{-1}\frac{b}{a} + \tan^{-1}\frac{d}{c} \end{aligned}$$





3.6 (a)

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{-3}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \\ &= -3\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4^2}z^{-2} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{4^n}z^{-n} + \cdots\right) \\ &\quad + 4\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2^2}z^{-2} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2^n}z^{-n} + \cdots\right) \\ &= 1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{13}{16}z^{-2} + \cdots + (-1)^n\left(\frac{-3}{4^n} + \frac{4}{2^n}\right) + \cdots \end{aligned}$$

$$x(n) = (-1)^n\left(\frac{-3}{4^n} + \frac{4}{2^n}\right)$$

(b)

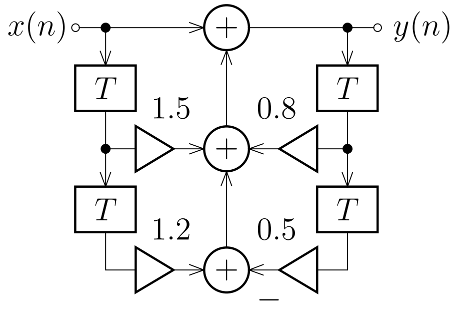
$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2^n} z^{-n} + \cdots\right) \\
&\quad + 3\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 z^{-2} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n z^{-n} + \cdots\right) \\
&= 5 + \frac{5}{4}z^{-1} + \left(\frac{1}{2} + 3\left(\frac{3}{4}\right)^2\right) z^{-2} + \cdots \\
&\quad + \left(2\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) z^{-n} + \cdots \\
x(n) &= 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n
\end{aligned}
$$

3.7

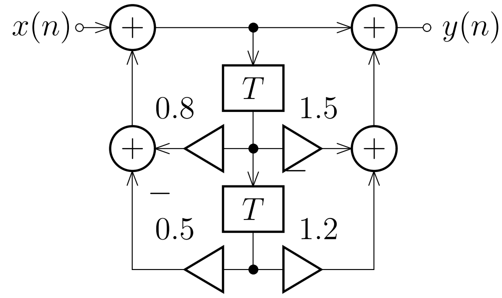
$$
\begin{array}{r|llllll}
 & 1 & +\frac{3}{4}z^{-1} & -\frac{11}{16}z^{-2} & -\frac{45}{64}z^{-3} & \cdots & \\ \hline
1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2} & 1 & & -z^{-2} & & & \\
 & 1 & -\frac{3}{4}z^{-1} & +\frac{1}{4}z^{-2} & & & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{3}{4}z^{-1} & -\frac{5}{4}z^{-2} & & & \\
 & & \frac{3}{4}z^{-1} & -\frac{9}{16}z^{-2} & +\frac{3}{16}z^{-3} & & \\ \cline{3-5}
 & & & -\frac{11}{16}z^{-2} & -\frac{3}{16}z^{-3} & & \\
 & & & -\frac{11}{16}z^{-2} & +\frac{33}{64}z^{-3} & -\frac{11}{64}z^{-4} & \\ \cline{4-6}
 & & & & -\frac{45}{64}z^{-3} & +\frac{11}{64}z^{-4} & \\
 & & & & -\frac{45}{64}z^{-3} & +\frac{135}{256}z^{-4} & -\frac{45}{256}z^{-5} \\ \cline{5-7}
 & & & & & -\frac{91}{256}z^{-4} & +\frac{45}{256}z^{-5} \\
 & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x(n) = \delta(n) &+ 0.75\,\delta(n-1) - 0.6875\,\delta(n-2) - 0.703125\,\delta(n-3) \\
&- 0.35546875\,\delta(n-4) - 0.090820312\,\delta(n-5) \\
&+ 0.020751953\,\delta(n-6) + 0.038269043\,\delta(n-7) \\
&+ 0.023509489\,\delta(n-8) + 0.0080666077\,\delta(n-9) \\
&+ 0.00017261505\,\delta(n-10) + \cdots
\end{aligned}
$$

3.8



直接形1



直接形2

3.9 (a)

$$y(n) = a_0\ x(n) + a_1\ x(n-1) - b_1\ y(n-1) - b_2\ y(n-2)$$

(b)

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1\ z^{-1}}{1 + b_1\ z^{-1} + b_2\ z^{-2}}$$

3.10 (a)

$$w(n) = x(n) - b_1\ w(n-1) - b_2\ w(n-2)$$
$$y(n) = a_0\ w(n) + a_1\ w(n-1) + a_2\ w(n-2)$$

(b)

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + b_1\ z^{-1} + b_2\ z^{-2}} \tag{S.10-1}$$
$$Y(z) = (a_0 + a_1\ z^{-1} + a_2\ z^{-2}) \cdot W(z) \tag{S.10-2}$$

式 (S.10-1) を式 (S.10-2) に代入し，$H(z)$ を得る．

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1\ z^{-1} + a_2\ z^{-2}}{1 + b_1\ z^{-1} + b_2\ z^{-2}} \tag{S.10-3}$$

4 章演習問題略解

4.1 **(a)** 位相特性：非直線

(b) 位相特性：直線，タイプ：4

(c) 位相特性：非直線

(d) 位相特性：直線，タイプ：4

4.2 **(a)** タイプ：1

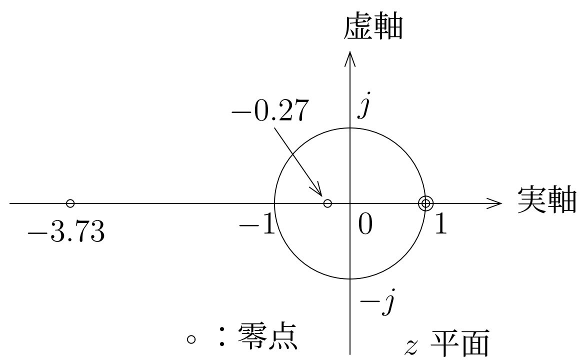
直線位相項と零位相多項式の積の形の伝達関数は

$$\begin{aligned}H(z) &= -0.125 - 0.25z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.25z^{-3} - 0.125z^{-4} \\ &= -0.125\left(1 + 2z^{-1} - 6z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}\right) \\ &= -0.125z^{-2}\left\{\left(z^2 + z^{-2}\right) + 2\left(z + z^{-1}\right) - 6\right\}\end{aligned}$$

となる．また

$$H(z) = -0.125\left(1 - z^{-1}\right)^2\left\{1 - \left(-2 + \sqrt{3}\right)z^{-1}\right\}\left\{1 - \left(-2 - \sqrt{3}\right)z^{-1}\right\}$$

となるので， z 平面上の零点の位置は解図 4.2(a-1) となる．



解図 4.2(a-1)

さらに

$$H(z) = -0.125z^{-2}\left\{\left(z^2 + z^{-2}\right) + 2\left(z + z^{-1}\right) - 6\right\}$$

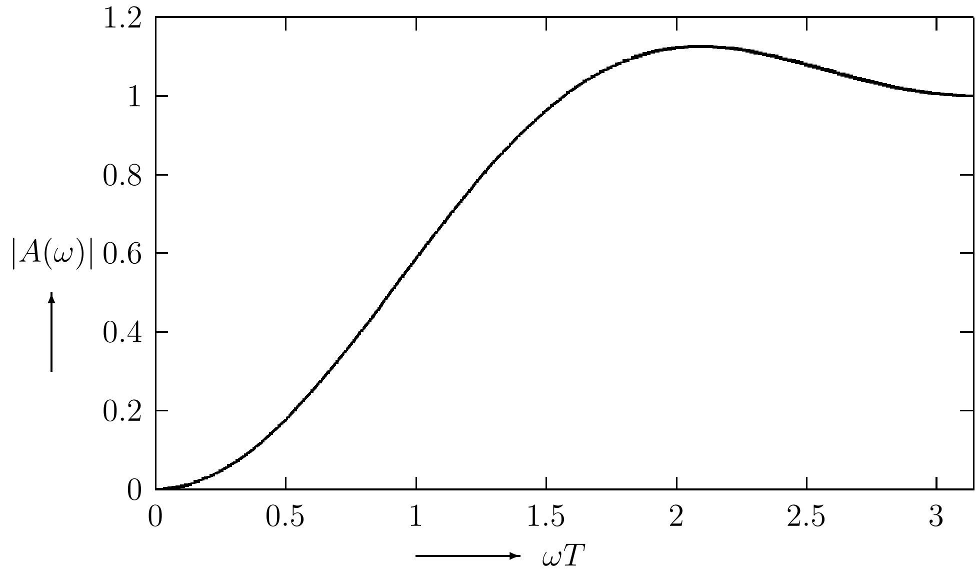
において $z = \mathrm{e}^{j\omega T}$ とおくと

$$H\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) = -0.125\mathrm{e}^{-j2\omega T}\left\{2\cos 2\omega T + 2 \cdot 2\cos\omega T - 6\right\}$$

となるので，振幅周波数特性 $A(\omega)$ は

$$A(\omega) = -0.25\left\{\cos 2\omega T + 2\cos\omega T - 3\right\}$$

となる．よって，解図 4.2(a-2) となり，これは HPF である．



解図 4.2(a-2)

(b) タイプ：1

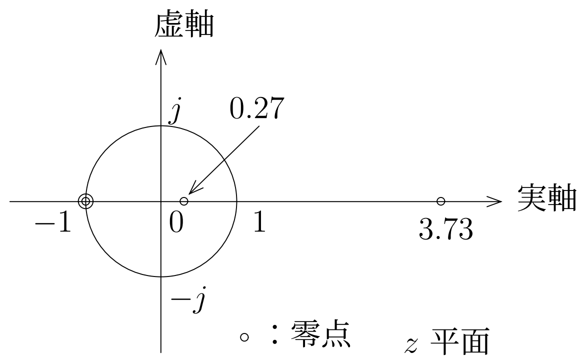
直線位相項と零位相多項式の積の形の伝達関数は

$$
\begin{aligned}
H(z) &= -0.125 + 0.25z^{-1} + 0.75z^{-2} + 0.25z^{-3} - 0.125z^{-4} \\
&= -0.125\left(1 - 2z^{-1} - 6z^{-2} - 2z^{-3} + z^{-4}\right) \\
&= -0.125z^{-2}\left\{\left(z^2 + z^{-2}\right) - 2\left(z + z^{-1}\right) - 6\right\}
\end{aligned}
$$

となる．また

$$
H(z) = -0.125\left(1 + z^{-1}\right)^2 \left\{1 - \left(2 + \sqrt{3}\right) z^{-1}\right\} \left\{1 - \left(2 - \sqrt{3}\right) z^{-1}\right\}
$$

となるので，z 平面上の零点の位置は解図 4.2(b-1) となる．



解図 4.2(b-1)

さらに

$$
H(z) = -0.125z^{-2}\left\{\left(z^2 + z^{-2}\right) - 2\left(z + z^{-1}\right) - 6\right\}
$$

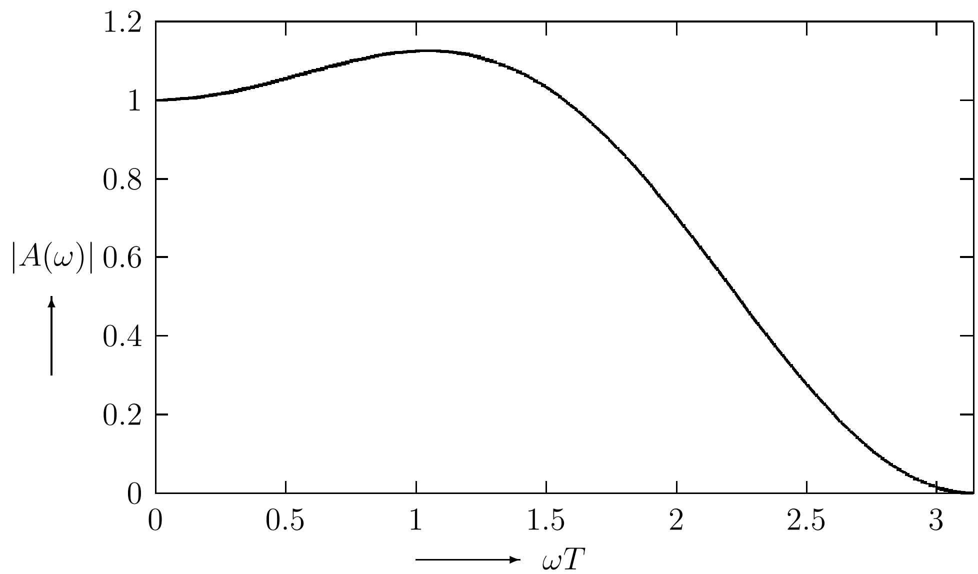
において $z=\mathrm{e}^{j\omega T}$ とおくと

$$H\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right)=-0.125\mathrm{e}^{-j2\omega T}\left\{2\cos 2\omega T-2\cdot 2\cos\omega T-6\right\}$$

となるので，振幅周波数特性 $A(\omega)$ は

$$A(\omega)=-0.25\left\{\cos 2\omega T-2\cos\omega T-3\right\}$$

となる．よって，解図 4.2(b-2) となり，これは LPF である．



解図 4.2(b-2)

(c) タイプ：2

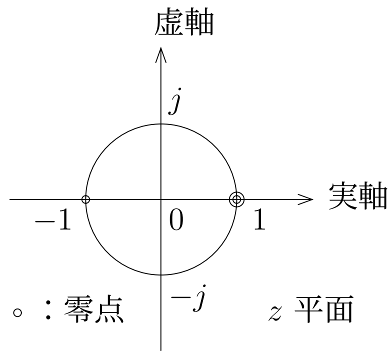
直線位相項と零位相多項式の積の形の伝達関数は

$$\begin{aligned}H(z)&=0.25-0.25z^{-1}-0.25z^{-2}+0.25z^{-3}\\&=0.25\left(1-z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}\right)\\&=0.25z^{-\frac{3}{2}}\left\{\left(z^{\frac{3}{2}}+z^{-\frac{3}{2}}\right)-\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}\end{aligned}$$

となる．また

$$H(z)=0.25\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1+z^{-1}\right)$$

となるので， z 平面上の零点の位置は解図 4.2(c-1) となる．



解図 4.2(c-1)

さらに

$$H(z) = 0.25z^{-\frac{3}{2}}\left\{\left(z^{\frac{3}{2}} + z^{-\frac{3}{2}}\right) - \left(z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}$$

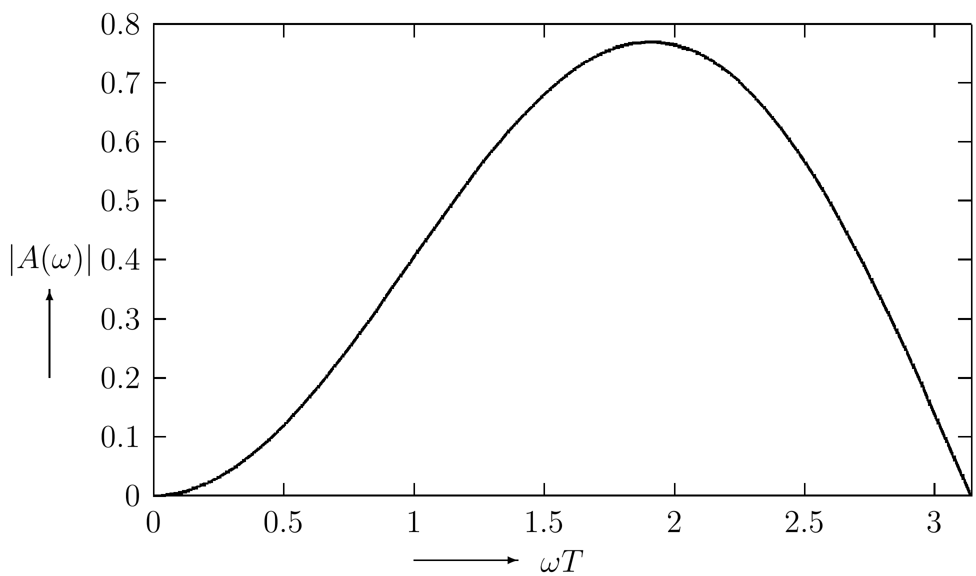
において $z = \mathrm{e}^{j\omega T}$ とおくと

$$H\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) = 0.25\mathrm{e}^{-j\frac{3}{2}\omega T}\left\{2\cos\frac{3}{2}\omega T - 2\cos\frac{1}{2}\omega T\right\}$$

となるので，振幅周波数特性 $A(\omega)$ は

$$A(\omega) = 0.5\left\{\cos\frac{3}{2}\omega T - \cos\frac{1}{2}\omega T\right\}$$

となる．よって，解図 4.2(c-2) となり，これは BPF である．



解図 4.2(c-2)

(d) タイプ：4

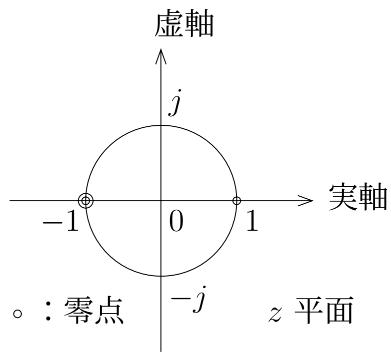
直線位相項と零位相多項式の積の形の伝達関数は

$$
\begin{aligned}
H(z) &= 0.5 + 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2} - 0.5z^{-3} \\
&= 0.5\left(1 + z^{-1} - z^{-2} - z^{-3}\right) \\
&= 0.5z^{-\frac{3}{2}}\left\{\left(z^{\frac{3}{2}} - z^{-\frac{3}{2}}\right) + \left(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

となる．また

$$
H(z) = 0.5\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right)^2
$$

となるので， z 平面上の零点の位置は解図 4.2(d-1) となる．



解図 4.2(d-1)

さらに

$$
H(z) = 0.5z^{-\frac{3}{2}}\left\{\left(z^{\frac{3}{2}} - z^{-\frac{3}{2}}\right) + \left(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}
$$

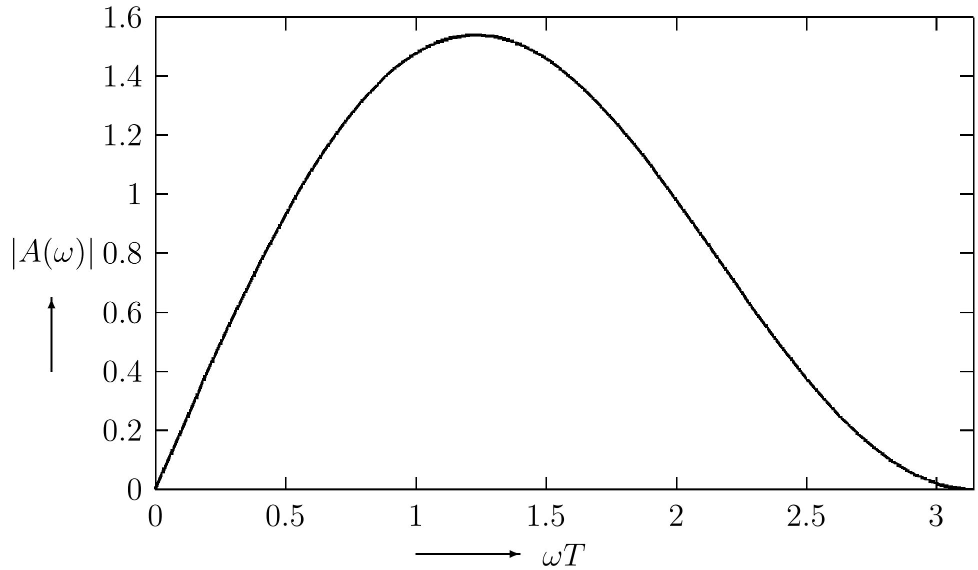
において $z = \mathrm{e}^{j\omega T}$ とおくと

$$
H\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) = 0.5\mathrm{e}^{-j\frac{3}{2}\omega T}\left\{2j\sin\frac{3}{2}\omega T + 2j\sin\frac{1}{2}\omega T\right\}
$$

となるので，振幅周波数特性 $A(\omega)$ は

$$
A(\omega) = \sin\frac{3}{2}\omega T + \sin\frac{1}{2}\omega T
$$

となる．よって，解図 4.2(d-2) となり，これは BPF である．



解図 4.2(d-2)

(e) タイプ：3

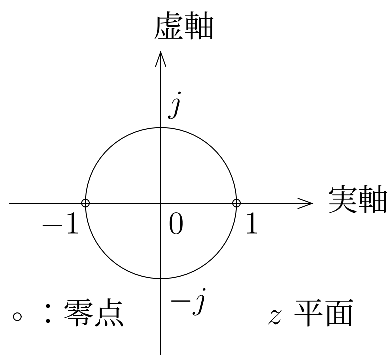
直線位相項と零位相多項式の積の形の伝達関数は

$$H(z) = 0.5 - 0.5z^{-2} = 0.5\left(1 - z^{-2}\right) = 0.5z^{-1}\left(z^{1} - z^{-1}\right)$$

となる．また

$$H(z) = 0.5\left(1 - z^{-2}\right)$$

となるので，z 平面上の零点の位置は解図 4.2(e-1) となる．



解図 4.2(e-1)

さらに

$$H(z) = 0.5z^{-1}\left(z^{1} - z^{-1}\right)$$

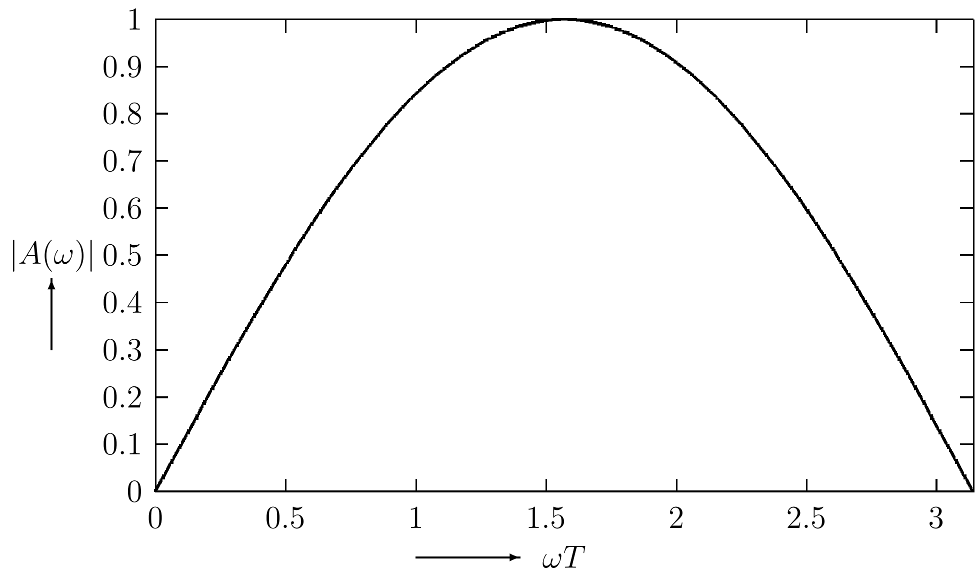
において $z = \mathrm{e}^{j\omega T}$ とおくと

$$H\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) = 0.5\mathrm{e}^{-j\omega T}(2j\sin\omega T)$$

となるので，振幅周波数特性 $A(\omega)$ は

$$A(\omega) = \sin \omega T$$

となる．よって，解図 4.2(e-2) となり，これは BPF である．



解図 4.2(e-2)

(f) タイプ：1

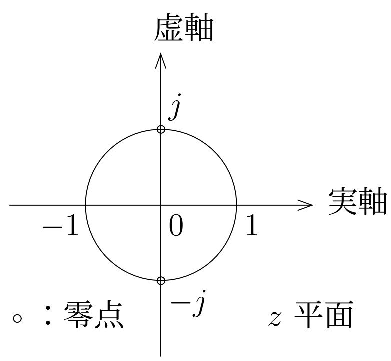
直線位相項と零位相多項式の積の形の伝達関数は

$$H(z) = 0.5 + 0.5z^{-2} = 0.5\left(1 + z^{-2}\right) = 0.5z^{-1}\left(z^{1} + z^{-1}\right)$$

となる．また

$$H(z) = 0.5\left(1 + z^{-2}\right)$$

となるので，z 平面上の零点の位置は解図 4.2(f-1) となる．



解図 4.2(f-1)

さらに

$$H(z) = 0.5z^{-1}\left(z^{1} + z^{-1}\right)$$

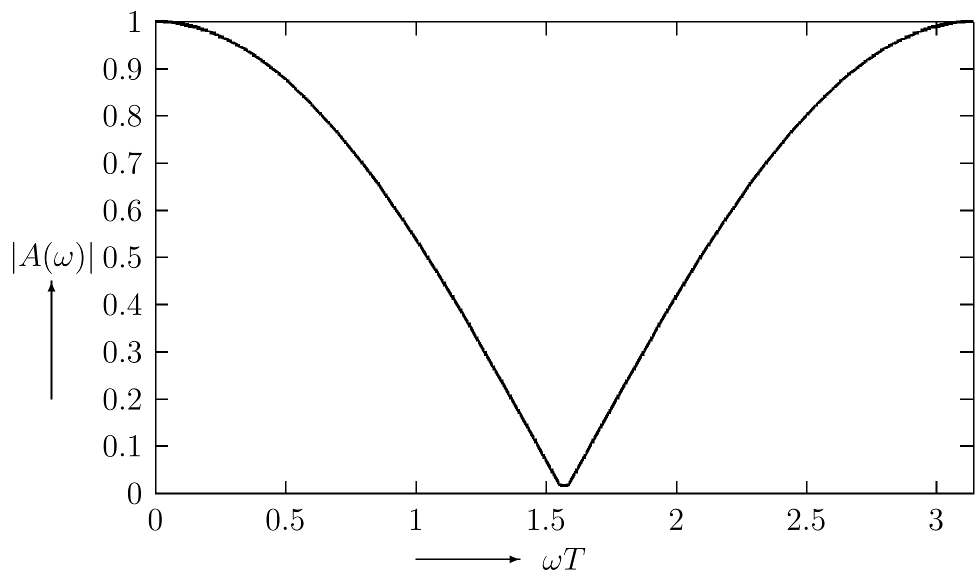
において $z = \mathrm{e}^{j\omega T}$ とおくと

$$H\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) = 0.5\mathrm{e}^{-j\omega T}(2\cos\omega T)$$

となるので，振幅周波数特性 $A(\omega)$ は

$$A(\omega) = \cos\omega T$$

となる．よって，解図 4.2(f-2) となり，これは BSF である．



解図 4.2(f-2)

4.3 **(a)** この問題において $z = 1$ の零点はミスプリントである．よって，以下 $z = 1$ の零点は無いものとして略解を示す．そうするとこれは

タイプ：1，次数：6，長さ：7

となる．

直線位相項と零位相多項式（因数の積の形）の積の形の伝達関数は次のように

して求められる．

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h(0)\left(1-0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
&\quad\cdot\left(1-0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
&\quad\cdot\left(1-\mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-j\frac{3\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
&= z^{-3}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad\cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad\cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-j\frac{3\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&= z^{-3}h(0)\left\{z-\left(0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}+0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\right)+z^{-1}\right\}\\
&\quad\cdot\left\{z-\left(0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}+0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\right)+z^{-1}\right\}\left(z+\sqrt{2}+z^{-1}\right)\\
&= z^{-3}h(0)\left\{z^2-\left(0.8+0.8^{-1}\right)\left(\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\right)z\right.\\
&\quad+\left(1+0.8^2+0.8^{-2}+\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}}+1\right)\\
&\quad\left.-\left(0.8+0.8^{-1}\right)\left(\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\right)z^{-1}+z^{-2}\right\}\\
&\quad\cdot\left(z+\sqrt{2}+z^{-1}\right)\\
&= z^{-3}h(0)\left\{z^2-2.05\sqrt{2}z+4.2025-2.05\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}\right\}\\
&\quad\cdot\left(z+\sqrt{2}+z^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

上式の z^2 の多項式はテキスト p.82 の式 (4.24) の零位相多項式である．
また

$$
\begin{aligned}
H(z) &= z^{-3}h(0)\left(z^3-1.05\sqrt{2}z^2+1.1025z+0.1025\sqrt{2}\right.\\
&\quad\left.+1.1025z^{-1}-1.05\sqrt{2}z^{-2}+z^{-3}\right)\\
&= z^{-3}h(0)\left\{\left(z^3+z^{-3}\right)-1.05\sqrt{2}\left(z^2+z^{-2}\right)\right.\\
&\quad\left.+1.1025\left(z+z^{-1}\right)+0.1025\sqrt{2}\right\}
\end{aligned}
$$

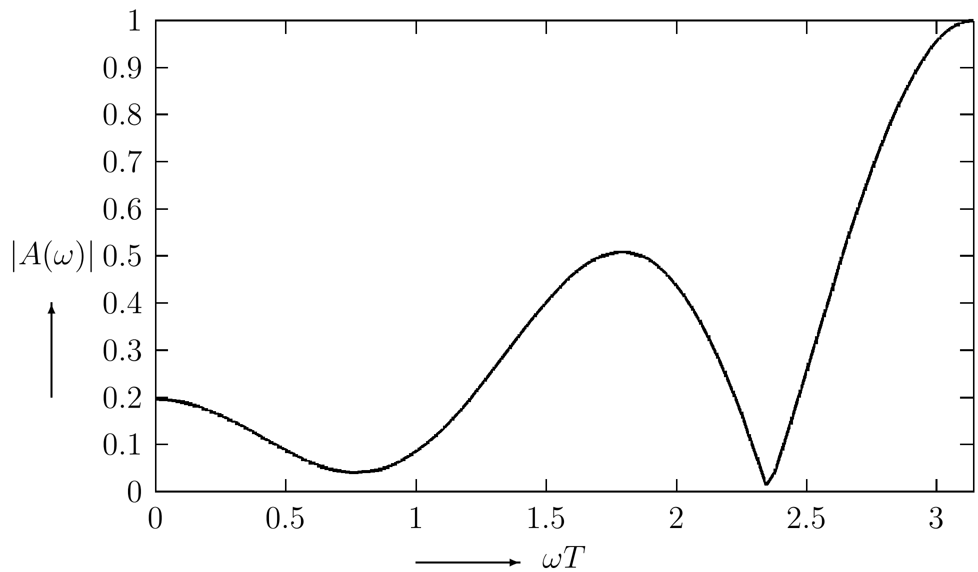
であるから， $H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right)$ の三角級数は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) = 2h(0)&\left\{\cos 3\omega T-1.05\sqrt{2}\cos 2\omega T\right.\\
&\left.+1.1025\cos\omega T+\frac{0.1025\sqrt{2}}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

よって，振幅周波数特性は

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) \\
&= 2h(0)\left\{\cos 3\omega T - 1.05\sqrt{2}\cos 2\omega T + 1.1025\cos\omega T + \frac{0.1025\sqrt{2}}{2}\right\} \\
&\simeq 2h(0)\left\{\cos 3\omega T - 1.4849\cos 2\omega T + 1.1025\cos\omega T + 0.0725\right\}
\end{aligned}
$$

と近似できる．したがって，$|A(\omega)|$ は解図 4.3(a) のようになり，$\omega T = \dfrac{3\pi}{4} \simeq 2.356$ において $A(\omega) = 0$ である．これは BSF である．ただし，$h(0) = 0.1422$ とした．



解図 4.3(a)

また，インパルス応答は $H(z)$ の式より $\{0.1422,\ -0.2112,\ 0.1568,\ 0.0206,\ 0.1568,\ -0.2112,\ 0.1422\}$ と求められる．

(b) タイプ：2，次数：5，長さ：6

直線位相項と零位相多項式（因数の積の形）の積の形の伝達関数は次のように

して求められる．

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h(0)\left(1+z^{-1}\right)\left(1-0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right) \\
&\quad \cdot\left(1-0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right) \\
&= z^{-\frac{5}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad \cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= z^{-\frac{5}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad \cdot\left(z^{2}-2.05\sqrt{2}z+4.2025-2.05\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}\right)
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
H(z) &= z^{-\frac{5}{2}}h(0)\left\{z^{\frac{5}{2}}-\left(2.05\sqrt{2}-1\right)z^{\frac{3}{2}}+\left(4.2025-2.05\sqrt{2}\right)z^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\quad \left.+\left(4.2025-2.05\sqrt{2}\right)z^{-\frac{1}{2}}-\left(2.05\sqrt{2}-1\right)z^{-\frac{3}{2}}+z^{-\frac{5}{2}}\right\} \\
&= z^{-\frac{5}{2}}h(0)\left\{\left(z^{\frac{5}{2}}+z^{-\frac{5}{2}}\right)-\left(2.05\sqrt{2}-1\right)\left(z^{\frac{3}{2}}+z^{-\frac{3}{2}}\right)\right. \\
&\quad \left.+\left(4.2025-2.05\sqrt{2}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

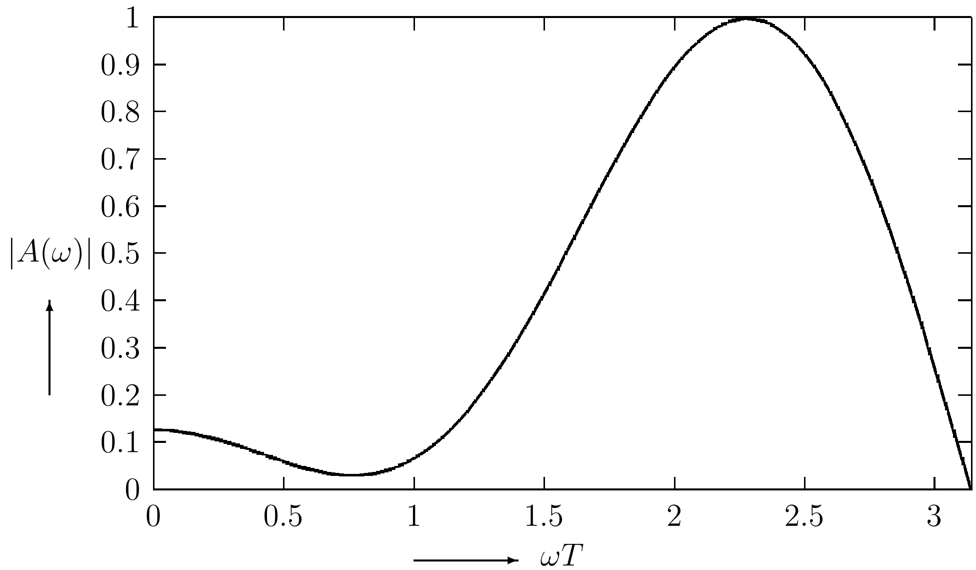
であるから， $H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right)$ の三角級数は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) = 2h(0)&\left\{\cos\frac{5\omega T}{2}-\left(2.05\sqrt{2}-1\right)\cos\frac{3\omega T}{2}\right. \\
&\quad \left.+\left(4.2025-2.05\sqrt{2}\right)\cos\frac{\omega T}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

よって，振幅周波数特性は

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) \\
&= 2h(0)\left\{\cos\frac{5\omega T}{2}-\left(2.05\sqrt{2}-1\right)\cos\frac{3\omega T}{2}\right. \\
&\quad \left.+\left(4.2025-2.05\sqrt{2}\right)\cos\frac{\omega T}{2}\right\} \\
&\simeq 2h(0)\left\{\cos\frac{5\omega T}{2}-1.8991\cos\frac{3\omega T}{2}+1.3034\cos\frac{\omega T}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

と近似できる．したがって， $|A(\omega)|$ は解図 4.3(b) のようになり，これは BPF である．ただし， $h(0)=0.1555$ とした．



解図 4.3(b)

また，インパルス応答は $H(z)$ の式より $\{0.1555,\ -0.2953, 0.2027,\ 0.2027,\ -0.2953,\ 0.1555\}$ と求められる．

(c) タイプ：4，次数：7，長さ：8

直線位相項と零位相多項式（因数の積の形）の積の形の伝達関数は次のようにして求められる．

$$
\begin{aligned}
H(z) = {} & h(0)\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
& \cdot\left(1-0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
& \cdot\left(1-\mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-j\frac{3\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
= {} & z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
& \cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
& \cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-j\frac{3\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
= {} & z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
& \cdot\left\{z^2-2.05\sqrt{2}z+4.2025-2.05\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}\right\}\\
& \cdot\left(z+\sqrt{2}+z^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
H(z) &= z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad\cdot\left(z^3-1.05\sqrt{2}z^2+1.1025z+0.1025\sqrt{2}\right.\\
&\quad\left.+1.1025z^{-1}-1.05\sqrt{2}z^{-2}+z^{-3}\right)\\
&= z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left\{z^{\frac{7}{2}}-\left(1.05\sqrt{2}+1\right)z^{\frac{5}{2}}\right.\\
&\quad+\left(1.1025+1.05\sqrt{2}\right)z^{\frac{3}{2}}+\left(0.1025\sqrt{2}-1.1025\right)z^{\frac{1}{2}}\\
&\quad-\left(0.1025\sqrt{2}-1.1025\right)z^{-\frac{1}{2}}-\left(1.1025+1.05\sqrt{2}\right)z^{-\frac{3}{2}}\\
&\quad\left.+\left(1.05\sqrt{2}+1\right)z^{-\frac{5}{2}}-z^{-\frac{7}{2}}\right\}\\
&= z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left\{\left(z^{\frac{7}{2}}-z^{-\frac{7}{2}}\right)-\left(1.05\sqrt{2}+1\right)\left(z^{\frac{5}{2}}-z^{-\frac{5}{2}}\right)\right.\\
&\quad+\left(1.1025+1.05\sqrt{2}\right)\left(z^{\frac{3}{2}}-z^{-\frac{3}{2}}\right)\\
&\quad\left.+\left(0.1025\sqrt{2}-1.1025\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

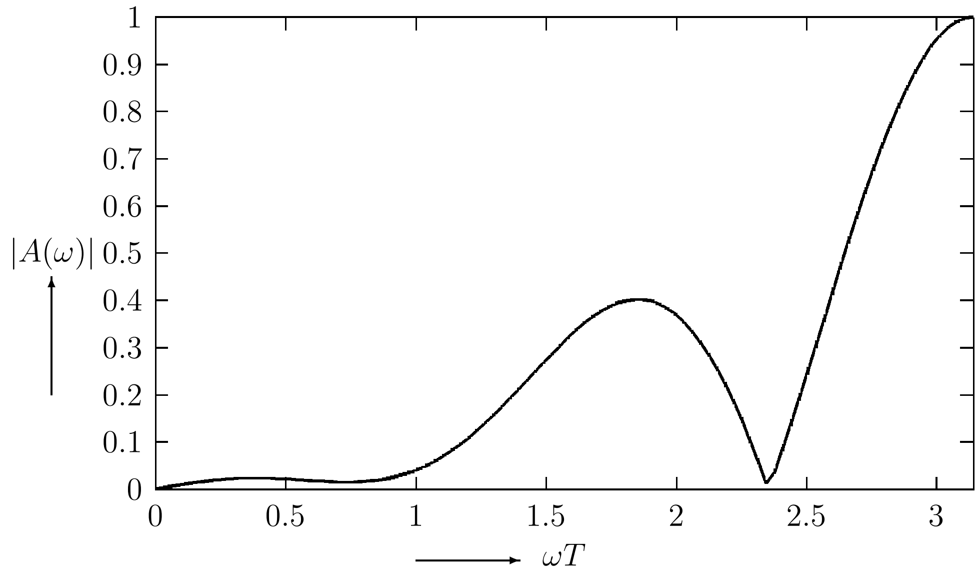
であるから， $H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right)$ の三角級数は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) &= j2h(0)\left\{\sin\frac{7\omega T}{2}-\left(1.05\sqrt{2}+1\right)\sin\frac{5\omega T}{2}\right.\\
&\quad+\left(1.1025+1.05\sqrt{2}\right)\sin\frac{3\omega T}{2}\\
&\quad\left.+\left(0.1025\sqrt{2}-1.1025\right)\sin\frac{\omega T}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

よって，振幅周波数特性は

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= 2h(0)\left\{\sin\frac{7\omega T}{2}-\left(1.05\sqrt{2}+1\right)\sin\frac{5\omega T}{2}\right.\\
&\quad+\left(1.1025+1.05\sqrt{2}\right)\sin\frac{3\omega T}{2}\\
&\quad\left.+\left(0.1025\sqrt{2}-1.1025\right)\sin\frac{\omega T}{2}\right\}\\
&\simeq 2h(0)\left\{\sin\frac{7\omega T}{2}-2.4849\sin\frac{5\omega T}{2}\right.\\
&\quad\left.+2.5874\sin\frac{3\omega T}{2}-0.9575\sin\frac{\omega T}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

と近似できる．したがって， $|A(\omega)|$ は解図 4.3(c) のようになり，$\omega T=\dfrac{3\pi}{4}\simeq 2.356$ において $A(\omega)=0$ である．これは HPF である．ただし， $h(0)=0.0711$ とした．



解図 4.3(c)

また，インパルス応答は $H(z)$ の式より $\{0.0711,\ -0.1767,\ 0.184,\ -0.0681,$ $0.0681,\ -0.184,\ 0.1767\ -0.0711\}$ と求められる．

(d) タイプ：2，次数：7，長さ：8

直線位相項と零位相多項式（因数の積の形）の積の形の伝達関数は次のようにして求められる．

$$
\begin{aligned}
H(z) = {} & h(0)\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1+z^{-1}\right) \\
& \cdot\left(1-0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right) \\
& \cdot\left(1-0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right) \\
= {} & z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)^2\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right) \\
& \cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right) \\
& \cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right) \\
= {} & z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)^2\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right) \\
& \cdot\left(z^2-2.05\sqrt{2}z+4.2025-2.05\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}\right)
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
H(z) &= z^{-\frac{7}{2}} h(0) \left(z - 2 + z^{-1}\right) \\
&\quad \cdot \left\{ z^{\frac{5}{2}} - \left(2.05\sqrt{2} - 1\right) z^{\frac{3}{2}} + \left(4.2025 - 2.05\sqrt{2}\right) z^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \left(4.2025 - 2.05\sqrt{2}\right) z^{-\frac{1}{2}} - \left(2.05\sqrt{2} - 1\right) z^{-\frac{3}{2}} + z^{-\frac{5}{2}} \right\} \\
&= z^{-\frac{7}{2}} h(0) \left\{ z^{\frac{7}{2}} - \left(2.05\sqrt{2} + 1\right) z^{\frac{5}{2}} + \left(2.05\sqrt{2} + 3.2025\right) z^{\frac{3}{2}} \right. \\
&\quad - 3.2025 z^{\frac{1}{2}} - 3.2025 z^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad \left. + \left(2.05\sqrt{2} + 3.2025\right) z^{-\frac{3}{2}} - \left(2.05\sqrt{2} + 1\right) z^{-\frac{5}{2}} + z^{-\frac{7}{2}} \right\} \\
&= z^{-\frac{7}{2}} h(0) \left\{ \left(z^{\frac{7}{2}} + z^{-\frac{7}{2}}\right) - \left(2.05\sqrt{2} + 1\right) \left(z^{\frac{5}{2}} + z^{-\frac{5}{2}}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(2.05\sqrt{2} + 3.2025\right) \left(z^{\frac{3}{2}} + z^{-\frac{3}{2}}\right) - 3.2025 \left(z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}\right) \right\}
\end{aligned}
$$

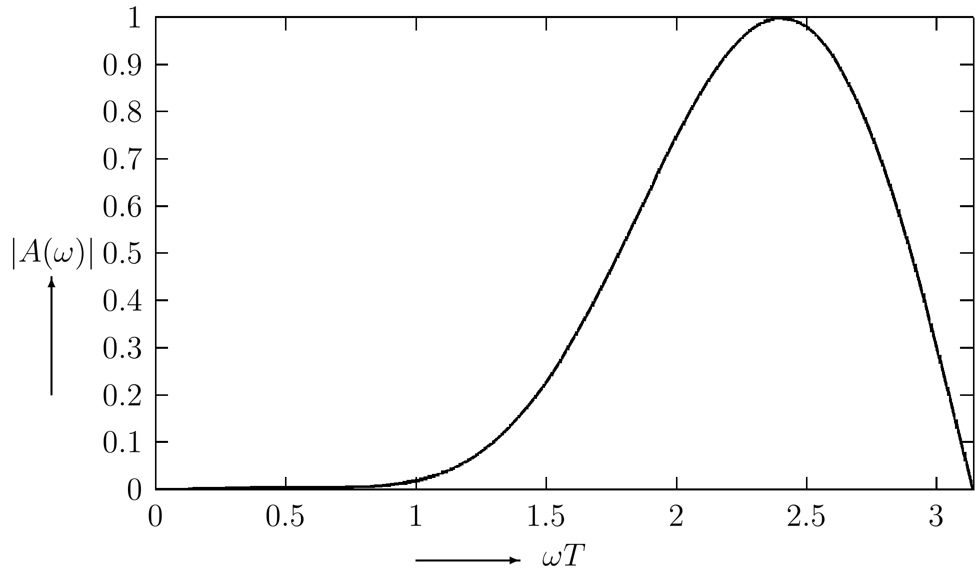
であるから， $H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right)$ の三角級数は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) = 2h(0) &\left\{ \cos\frac{7\omega T}{2} - \left(2.05\sqrt{2} + 1\right) \cos\frac{5\omega T}{2} \right. \\
&\quad \left. + \left(2.05\sqrt{2} + 3.2025\right) \cos\frac{3\omega T}{2} - 3.2025 \cos\frac{\omega T}{2} \right\}
\end{aligned}
$$

よって，振幅周波数特性は

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) \\
&= 2h(0) \left\{ \cos\frac{7\omega T}{2} - \left(2.05\sqrt{2} + 1\right) \cos\frac{5\omega T}{2} \right. \\
&\quad \left. + \left(2.05\sqrt{2} + 3.2025\right) \cos\frac{3\omega T}{2} - 3.2025 \cos\frac{\omega T}{2} \right\} \\
&\simeq 2h(0) \left\{ \cos\frac{7\omega T}{2} - 3.8991 \cos\frac{5\omega T}{2} \right. \\
&\quad \left. + 6.1016 \cos\frac{3\omega T}{2} - 3.2025 \cos\frac{\omega T}{2} \right\}
\end{aligned}
$$

と近似できる．したがって， $|A(\omega)|$ は解図 4.3(d) のようになり，これは BPF である．ただし， $h(0) = 0.0458$ とした．



解図 4.3(d)

また，インパルス応答は $H(z)$ の式より $\{0.0458,\ -0.1786,\ 0.2795,\ -0.1467,\ -0.1467,\ 0.2795,\ -0.1786,\ 0.0458\}$ と求められる．

(e) タイプ：3，次数：6，長さ：7

直線位相項と零位相多項式（因数の積の形）の積の形の伝達関数は次のようにして求められる．

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h(0)\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)\left(1-0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right) \\
&\quad \cdot\left(1-0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right) \\
&= z^{-3}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad \cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad \cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= z^{-3}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad \cdot\left(z^{2}-2.05\sqrt{2}z+4.2025-2.05\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}\right)
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
H(z) = {} & z^{-3}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right) \\
& \cdot\left\{z^{\frac{5}{2}}-\left(2.05\sqrt{2}-1\right)z^{\frac{3}{2}}+\left(4.2025-2.05\sqrt{2}\right)z^{\frac{1}{2}}\right. \\
& \left.+\left(4.2025-2.05\sqrt{2}\right)z^{-\frac{1}{2}}-\left(2.05\sqrt{2}-1\right)z^{-\frac{3}{2}}+z^{-\frac{5}{2}}\right\} \\
= {} & z^{-3}h(0)\left\{z^{3}-2.05\sqrt{2}z^{2}+3.2025z\right. \\
& \left.-3.2025z^{-1}+2.05\sqrt{2}z^{-2}-z^{-3}\right\} \\
= {} & z^{-3}h(0)\left\{\left(z^{3}-z^{-3}\right)-2.05\sqrt{2}\left(z^{2}-z^{-2}\right)+3.2025\left(z-z^{-1}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

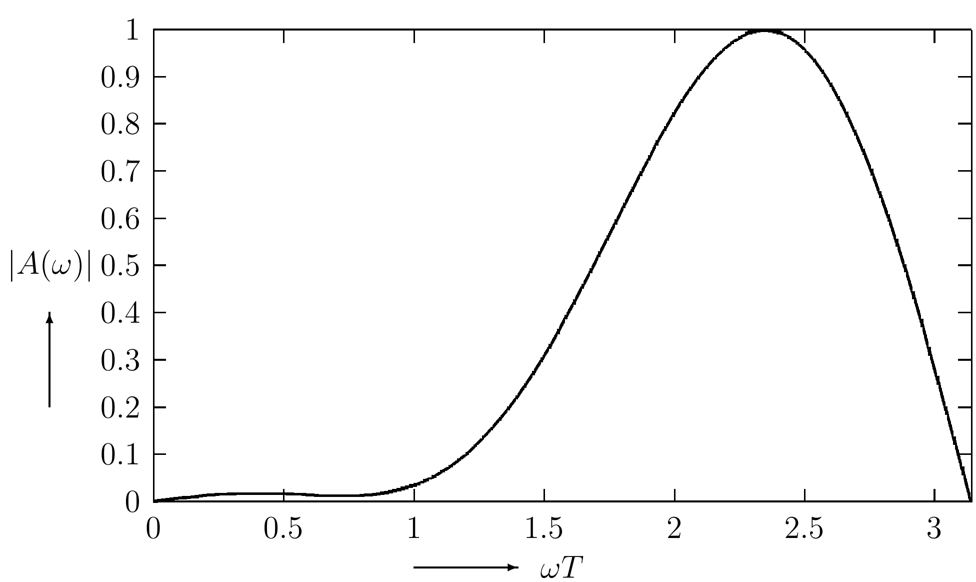
であるから， $H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right)$ の三角級数は次のようになる．

$$
H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right)=2jh(0)\left\{\sin 3\omega T-2.05\sqrt{2}\sin 2\omega T+3.2025\sin\omega T\right\}
$$

よって，振幅周波数特性は

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= 2h(0)\left\{\sin 3\omega T-2.05\sqrt{2}\sin 2\omega T+3.2025\sin\omega T\right\} \\
&\simeq 2h(0)\left\{\sin 3\omega T-2.8991\sin 2\omega T+3.2025\sin\omega T\right\}
\end{aligned}
$$

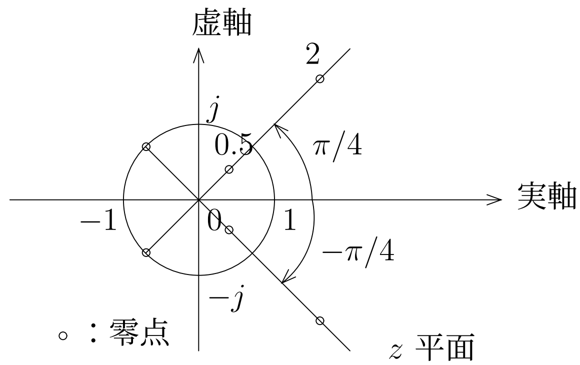
と近似できる．したがって，振幅周波数特性 $|A(\omega)|$ は解図 4.3(e) のようになり，これは BPF である．ただし， $h(0)=0.085$ とした．



解図 4.3(e)

また，インパルス応答は $H(z)$ の式より $\{0.085,\ -0.2464,\ 0.2722,\ 0,\ -0.2722,\ 0.2464,\ -0.085\}$ と求められる．

(f) 参考のため (a) の零点の半径を解図 4.3(f-1) のように 0.5 に補正した場合の解を求めてみる.



解図 4.3(f-1)

そうするとこれは

タイプ：1，次数：6，長さ：7

となる.

直線位相項と零位相多項式（因数の積の形）の積の形の伝達関数は次のようにして求められる.

$$
\begin{aligned}
H(z) = \ & h(0)\left(1-0.5\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.5^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
&\cdot\left(1-0.5^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.5\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
&\cdot\left(1-\mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-j\frac{3\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
=\ & z^{-3}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.5\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.5^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&\cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-0.5^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.5\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&\cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-j\frac{3\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
=\ & z^{-3}h(0)\left\{z-\left(0.5\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}+0.5^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\right)+z^{-1}\right\}\\
&\cdot\left\{z-\left(0.5^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}+0.5\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\right)+z^{-1}\right\}\left(z+\sqrt{2}+z^{-1}\right)\\
=\ & z^{-3}h(0)\left\{z^2-\left(0.5+0.5^{-1}\right)\left(\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\right)z\right.\\
&+\left(1+0.5^2+0.5^{-2}+\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}}+1\right)\\
&\left.-\left(0.5+0.5^{-1}\right)\left(\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\right)z^{-1}+z^{-2}\right\}\\
&\cdot\left(z+\sqrt{2}+z^{-1}\right)\\
=\ & z^{-3}h(0)\left\{z^2-2.5\sqrt{2}z+6.25-2.5\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}\right\}\\
&\cdot\left(z+\sqrt{2}+z^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
H(z) &= z^{-3}h(0)\left(z^3 - 1.5\sqrt{2}z^2 + 2.25z + 1.25\sqrt{2}\right. \\
&\qquad \left. +2.25z^{-1} - 1.5\sqrt{2}z^{-2} + z^{-3}\right) \\
&= z^{-3}h(0)\left\{\left(z^3 + z^{-3}\right) - 1.5\sqrt{2}\left(z^2 + z^{-2}\right)\right. \\
&\qquad \left. +2.25\left(z + z^{-1}\right) + 1.25\sqrt{2}\right\}
\end{aligned}
$$

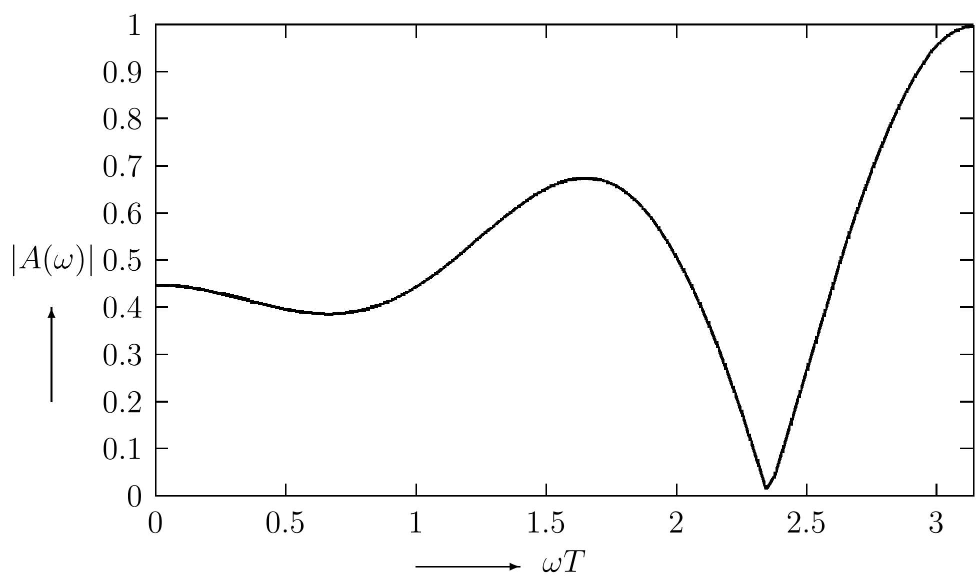
であるから， $H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right)$ の三角級数は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) = 2h(0)&\left\{\cos 3\omega T - 1.5\sqrt{2}\cos 2\omega T\right. \\
&\qquad \left. +2.25\cos\omega T + \frac{1.25\sqrt{2}}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

よって，振幅周波数特性は

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= 2h(0)\left\{\cos 3\omega T - 1.5\sqrt{2}\cos 2\omega T + 2.25\cos\omega T + \frac{1.25\sqrt{2}}{2}\right\} \\
&\simeq 2h(0)\left\{\cos 3\omega T - 2.1213\cos 2\omega T + 2.25\cos\omega T + 0.8839\right\}
\end{aligned}
$$

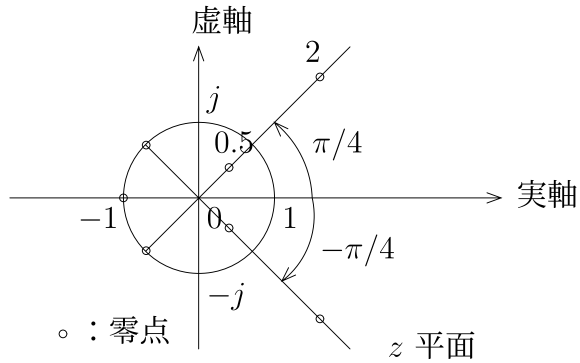
と近似できる．したがって，振幅周波数特性 $|A(\omega)|$ は解図 4.3(f-2) のようになり， $\omega T = \dfrac{3\pi}{4} \simeq 2.356$ において $A(\omega) = 0$ である．これは BSF である．ただし， $h(0) = 0.1111$ とした．



解図 4.3(f-2)

また，インパルス応答は $H(z)$ の式より $\{0.1111,\ -0.2357,\ 0.25,\ 0.1964,$ $0.25,\ -0.2357,\ 0.1111\}$ と求められる．

(g) 参考のため (b) の零点の半径を解図 4.3(g-1) のように 0.5 に補正し，さらに $z = \mathrm{e}^{\pm j\frac{3\pi}{4}}$ に零点を追加した場合の解を求めてみる．



解図 4.3(g-1)

そうするとこれは

タイプ：2，次数：7，長さ：8

となる．

直線位相項と零位相多項式（因数の積の形）の積の形の伝達関数は次のようにして求められる．

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h(0)\left(1+z^{-1}\right)\left(1-0.5\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.5^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
&\quad\cdot\left(1-0.5^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.5\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
&\quad\cdot\left(1-\mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-j\frac{3\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
&= z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.5\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.5^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad\cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-0.5^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.5\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad\cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-j\frac{3\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&= z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right)\left\{z-\left(0.5\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}+0.5^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\right)+z^{-1}\right\}\\
&\quad\cdot\left\{z-\left(0.5^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}+0.5\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\right)+z^{-1}\right\}\left(z+\sqrt{2}+z^{-1}\right)\\
&= z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right)\left\{z^{2}-\left(0.5+0.5^{-1}\right)\left(\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\right)z\right.\\
&\quad+\left(1+0.5^{2}+0.5^{-2}+\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}+\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}}+1\right)\\
&\quad\left.-\left(0.5+0.5^{-1}\right)\left(\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}\right)z^{-1}+z^{-2}\right\}\\
&\quad\cdot\left(z+\sqrt{2}+z^{-1}\right)\\
&= z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right)\left\{z^{2}-2.5\sqrt{2}z+6.25-2.5\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}\right\}\\
&\quad\cdot\left(z+\sqrt{2}+z^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
H(z) &= z^{-\frac{7}{2}} h(0) \left(z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}\right) \left(z^3 - 1.5\sqrt{2}z^2 + 2.25z + 1.25\sqrt{2}\right. \\
&\quad \left. +2.25z^{-1} - 1.5\sqrt{2}z^{-2} + z^{-3}\right) \\
&= z^{-\frac{7}{2}} h(0) \left\{ z^{\frac{7}{2}} - \left(1.5\sqrt{2} - 1\right) z^{\frac{5}{2}} + \left(2.25 - 1.5\sqrt{2}\right) z^{\frac{3}{2}} \right. \\
&\quad + \left(1.25\sqrt{2} + 2.25\right) z^{\frac{1}{2}} + \left(1.25\sqrt{2} + 2.25\right) z^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad \left. + \left(2.25 - 1.5\sqrt{2}\right) z^{-\frac{3}{2}} - \left(1.5\sqrt{2} - 1\right) z^{-\frac{5}{2}} + z^{-\frac{7}{2}} \right\} \\
&= z^{-\frac{7}{2}} h(0) \left\{ \left(z^{\frac{7}{2}} + z^{-\frac{7}{2}}\right) - \left(1.5\sqrt{2} - 1\right) \left(z^{\frac{5}{2}} + z^{-\frac{5}{2}}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(2.25 - 1.5\sqrt{2}\right) \left(z^{\frac{3}{2}} + z^{-\frac{3}{2}}\right) + \left(1.25\sqrt{2} + 2.25\right) \left(z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}\right) \right\}
\end{aligned}
$$

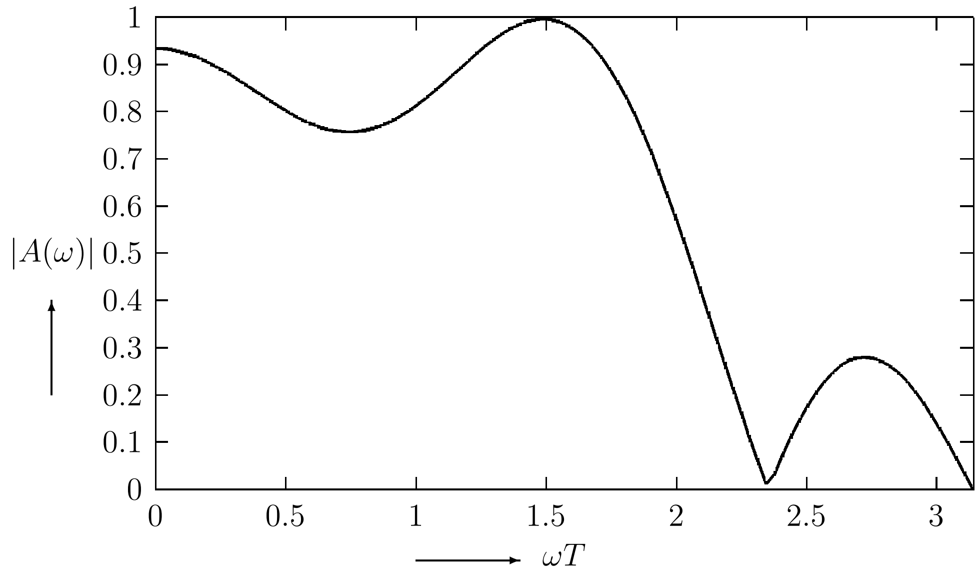
であるから， $H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right)$ の三角級数は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) = 2h(0) &\left\{ \cos\frac{7\omega T}{2} - \left(1.5\sqrt{2} - 1\right) \cos\frac{5\omega T}{2} \right. \\
&\quad \left. + \left(2.25 - 1.5\sqrt{2}\right) \cos\frac{3\omega T}{2} + \left(1.25\sqrt{2} + 2.25\right) \cos\frac{\omega T}{2} \right\}
\end{aligned}
$$

よって，振幅周波数特性は

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= 2h(0) \left\{ \cos\frac{7\omega T}{2} - \left(1.5\sqrt{2} - 1\right) \cos\frac{5\omega T}{2} \right. \\
&\quad \left. + \left(2.25 - 1.5\sqrt{2}\right) \cos\frac{3\omega T}{2} + \left(1.25\sqrt{2} + 2.25\right) \cos\frac{\omega T}{2} \right\} \\
&\simeq 2h(0) \left\{ \cos\frac{7\omega T}{2} - 1.1213 \cos\frac{5\omega T}{2} \right. \\
&\quad \left. +0.1287 \cos\frac{3\omega T}{2} + 4.0178 \cos\frac{\omega T}{2} \right\}
\end{aligned}
$$

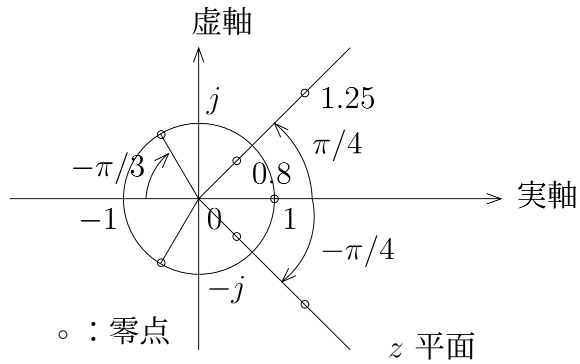
と近似できる．したがって，振幅周波数特性 $|A(\omega)|$ は解図 4.3(g-2) のようになり， $\omega T = \dfrac{3\pi}{4} \simeq 2.356$ において $A(\omega) = 0$ である．これは LPF である．ただし， $h(0) = 0.116$ とした．



解図 4.3(g-2)

また，インパルス応答は $H(z)$ の式より $\{0.116,\ -0.1301,\ 0.0149,\ 0.4661,\ 0.4661,\ 0.0149,\ -0.1301,\ 0.116\}$ と求められる．

(h) 参考のため (c) の零点 $z = \mathrm{e}^{\pm j\frac{3\pi}{4}}$ を $z = \mathrm{e}^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$ に移動した解図 4.3(h-1) の場合の解を求めてみる．



解図 4.3(h-1)

そうするとこれは

タイプ：4，次数：7，長さ：8

となる．

直線位相項と零位相多項式（因数の積の形）の積の形の伝達関数は次のように

して求められる．

$$
\begin{aligned}
H(z) &= h(0)\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
&\quad\cdot\left(1-0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\\
&\quad\cdot\left(1-\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{3}}z^{-1}\right)\\
&= z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8^{-1}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad\cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8^{-1}\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-0.8\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad\cdot\left(z^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{3}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{3}}z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&= z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad\cdot\left\{z^{2}-2.05\sqrt{2}z+4.2025-2.05\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}\right\}\\
&\quad\cdot\left(z+1+z^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
H(z) &= z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad\cdot\left\{z^{3}-\left(2.05\sqrt{2}-1\right)z^{2}+\left(5.1025-2.05\sqrt{2}\right)z\right.\\
&\quad-\left(4.1\sqrt{2}-4.2025\right)\\
&\quad\left.+\left(5.1025-2.05\sqrt{2}\right)z^{-1}-\left(2.05\sqrt{2}-1\right)z^{-2}+z^{-3}\right\}\\
&= z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left\{z^{\frac{7}{2}}-2.05\sqrt{2}z^{\frac{5}{2}}+4.1025z^{\frac{3}{2}}\right.\\
&\quad-\left(2.05\sqrt{2}+0.9\right)z^{\frac{1}{2}}+\left(2.05\sqrt{2}+0.9\right)z^{-\frac{1}{2}}\\
&\quad\left.-4.1025z^{-\frac{3}{2}}+2.05\sqrt{2}z^{-\frac{5}{2}}-z^{-\frac{7}{2}}\right\}\\
&= z^{-\frac{7}{2}}h(0)\left\{\left(z^{\frac{7}{2}}-z^{-\frac{7}{2}}\right)-2.05\sqrt{2}\left(z^{\frac{5}{2}}-z^{-\frac{5}{2}}\right)\right.\\
&\quad\left.+4.1025\left(z^{\frac{3}{2}}-z^{-\frac{3}{2}}\right)-\left(2.05\sqrt{2}+0.9\right)\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

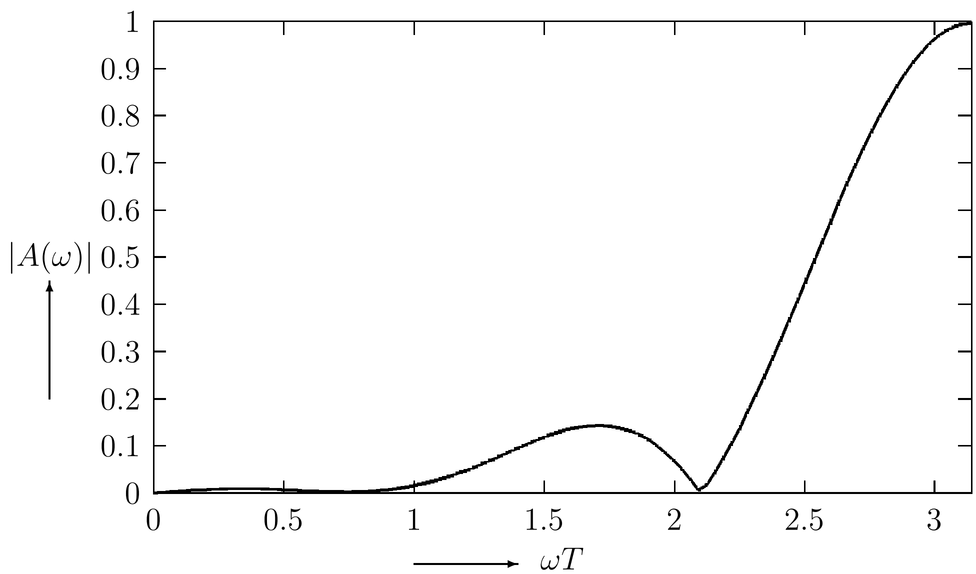
であるから， $H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right)$ の三角級数は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
H_0\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) = j2h(0)&\left\{\sin\frac{7\omega T}{2}-2.05\sqrt{2}\sin\frac{5\omega T}{2}\right.\\
&\left.+4.1025\sin\frac{3\omega T}{2}-\left(2.05\sqrt{2}+0.9\right)\sin\frac{\omega T}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

よって，振幅周波数特性は

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= 2h(0)\left\{\sin\frac{7\omega T}{2} - 2.05\sqrt{2}\sin\frac{5\omega T}{2}\right. \\
&\quad \left. +4.1025\sin\frac{3\omega T}{2} - \left(2.05\sqrt{2}+0.9\right)\sin\frac{\omega T}{2}\right\} \\
&\simeq 2h(0)\left\{\sin\frac{7\omega T}{2} - 2.8991\sin\frac{5\omega T}{2}\right. \\
&\quad \left. +4.1025\sin\frac{3\omega T}{2} - 3.7991\sin\frac{\omega T}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

と近似できる．したがって，振幅周波数特性 $|A(\omega)|$ は解図 4.3(h-2) のようになり，$\omega T = \dfrac{2\pi}{3} \simeq 2.0944$ において $A(\omega) = 0$ である．これは HPF である．ただし， $h(0) = 0.0422$ とした．



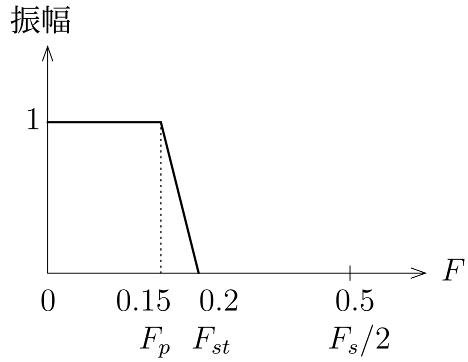
解図 4.3(h-2)

また，インパルス応答は $H(z)$ の式より $\{0.0422,\ -0.1223,\ 0.1731,\ -0.1603,\ 0.1603,\ -0.1731,\ 0.1223,\ -0.0422\}$ と求められる．

4.4 (a)

$$T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{50 \times 10^3} = 20 \times 10^{-6}\ 秒$$

(b) 解図 4.4 参照



解図 4.4

4.5

$$
\begin{aligned}
W_R\left(\mathrm{e}^{j\omega T}\right) &= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \mathrm{e}^{-jk\omega T} \\
&= \mathrm{e}^{j\frac{N\omega T}{2}}\left(1+\mathrm{e}^{-j\omega T}+\mathrm{e}^{-j2\omega T}+\cdots+\mathrm{e}^{-jN\omega T}\right) \\
&= \mathrm{e}^{j\frac{N\omega T}{2}}\frac{1-\mathrm{e}^{-j(N+1)\omega T}}{1-\mathrm{e}^{-j\omega T}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\frac{(N+1)\omega T}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-j(N+1)\omega T}\right)}{\mathrm{e}^{j\frac{\omega T}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-j\omega T}\right)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{j\frac{(N+1)\omega T}{2}}-\mathrm{e}^{-j\frac{(N+1)\omega T}{2}}}{\mathrm{e}^{j\frac{\omega T}{2}}-\mathrm{e}^{-j\frac{\omega T}{2}}} \\
&= \frac{\sin\frac{(N+1)\omega T}{2}}{\sin\frac{\omega T}{2}}
\end{aligned}
$$

4.6 式 (4.32) の第 1 式および図 4.18 の 2 番目の図を参照し

$$h_I(k) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\omega_c} \mathrm{e}^{j\omega kT}d\omega + \frac{T}{2\pi}\int_{\omega_c}^{\frac{\pi}{T}} \mathrm{e}^{j\omega kT}d\omega$$

第 1 項は $\omega' = -\omega$ と置き

$$\frac{T}{2\pi}\int_{\frac{2\pi}{T}}^{\omega_c} \mathrm{e}^{-j\omega' kT}\left(-d\omega'\right) = \frac{T}{2\pi}\int_{\omega_c}^{\frac{\pi}{T}} \mathrm{e}^{-j\omega' kT}d\omega'$$

ω' を改めて ω と書き．第 2 項とまとめると

$$h_I(k) = \frac{T}{2\pi}\int_{\omega_c}^{\frac{\pi}{T}}\left(\mathrm{e}^{j\omega kT}+\mathrm{e}^{-j\omega kT}\right)d\omega$$

$k \geq 1$ の場合

$$\begin{aligned} h_I(k) &= \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{1}{jkT} \left[\mathrm{e}^{jk\pi} - \mathrm{e}^{j\omega_c kT} - \mathrm{e}^{-jk\pi} + \mathrm{e}^{-j\omega_c kT} \right] \\ &= \frac{1}{k\pi} \cdot \frac{-1}{2j} \left[\mathrm{e}^{j\omega_c kT} - \mathrm{e}^{-j\omega_c kT} \right] \\ &= -\frac{1}{k\pi} \sin \omega_c kT \end{aligned}$$

$k = 0$ の場合

$$\begin{aligned} h_I(k) &= \frac{T}{2\pi} \int_{\omega_c}^{\frac{\pi}{T}} 2d\omega = \frac{T}{\pi} \left(\frac{\pi}{T} - \omega_c \right) \\ &= 1 - \frac{\omega_c T}{\pi} \end{aligned}$$

4.7 ハミング窓

(a) 不可能.

(b) 可能，窓の長さを変える.

ケイザー窓

(a) 可能，パラメータ β を変える.

(b) 可能，窓の長さを変える.

4.8 **(a)** 次数を上げ， $\dfrac{w_1}{w_2}$ を大きくする.

(b) 次数を下げ， $\dfrac{w_1}{w_2}$ を小さくする.

5 章演習問題略解

5.1

$$H(z)\cdot H(z^{-1}) = h^2\ \frac{(1+z^{-1})}{(1-b_1z^{-1})}\cdot\frac{(1+z)}{(1-b_1z)}$$
$$= h^2\ \frac{2+(z+z^{-1})}{1-b_1(z+z^{-1})+b_1^2}$$

$$H(z)\cdot H(z^{-1})\Big|_{z=\mathrm{e}^{j\omega T}} = h^2\ \frac{2(1+\cos\omega T)}{1-2b_1\cos\omega T+b_1^2}$$

5.2 式 (5.4) ↑ 1 の式より，分子の位相=0,

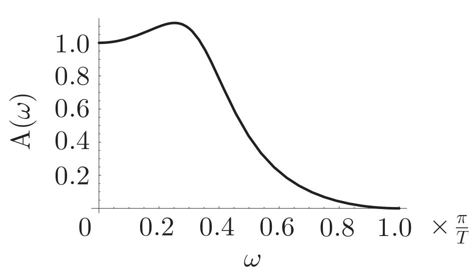
$$\theta(\omega) = -(\text{分母の位相})$$
$$= -\tan^{-1}\left\{\frac{(1+b_1)\sin\frac{\omega T}{2}}{(1-b_1)\cos\frac{\omega T}{2}}\right\}$$
$$= -\tan^{-1}\left\{\frac{(1+b_1)}{(1-b_1)}\tan\frac{\omega T}{2}\right\}$$

5.3 **(a)**

$$b_1 = 2r\cos\theta_{\mathrm{p}} = 1.2\cos\frac{\pi}{3} = 0.6$$
$$b_2 = r^2 = 0.36$$

$$H(z) = h\ \frac{(1+z^{-1})^2}{1-0.6z^{-1}+0.36z^{-2}}\ ,\quad h = \frac{1-0.6+0.36}{4} = \frac{0.76}{4} = 0.19$$

(b)

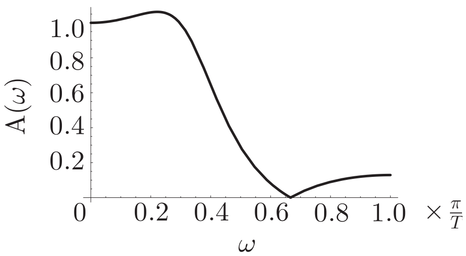


5.4 **(a)**

$$a_1 = -2\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1$$

$$H(z) = h\ \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1-0.6z^{-1}+0.36z^{-2}}\ ,\quad h = \frac{1-0.6+0.36}{2+1} = \frac{0.76}{3} = 0.253\dot{3}$$

(b)



5.5 **(a)** $T = 1/f_{\mathrm{s}} = 10^{-5}$，　$f_0 = 10$ [kHz] より $\omega_0 T = 0.2\pi$

$H(z) = h\ \dfrac{(1 - z^{-2})}{1 - b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$ の b_1，b_2，h を定める．

式 (5.15) より

$$\Delta f = 2 \times 10^3 = \frac{2}{2\pi}(1 - \sqrt{b_2}) \cdot 10^5$$

これより $b_2 = 0.878284$

式 (5.13) より

$$\frac{b_1}{1 + b_2} = \cos\omega_0 T = 0.8090$$

$$b_1 = (1 + b_2) \cdot 0.8090 = 1.519564$$

式 (5.14) より

$$h = \frac{1 - b_2}{2} = 0.0608579$$

(b) b_2，h は (a) と同じ

$f_0 = 30$ [kHz]，$\omega_0 T = 0.6\pi$，$\cos\omega_0 T = -0.3090$

$$b_1 = -1.878284 \times 0.3090 = -0.5804217$$

(c) 式 (5.15) より，

$$\Delta f = 4 \times 10^3 = \frac{1}{\pi}(1 - \sqrt{b_2}) \cdot 10^5$$

これより $b_2 = 0.764464$

式 (5.13) より，

$$b_1 = (1 + b_2) \cdot \cos 0.2\pi = 1.427451$$

式 (5.14) より，

$$h = \frac{1 - b_2}{2} = 0.117768$$

5.6

$$\theta(\omega) = -\omega T + \angle(1 - b_1 \mathrm{e}^{j\omega T}) - \angle(1 - b_1 \mathrm{e}^{-j\omega T})$$

ここで，$\angle(1 - b_1 \mathrm{e}^{-j\omega T}) = -\angle(1 - b_1 \mathrm{e}^{j\omega T})$ なるゆえ，

$$\theta(\omega) = -\omega T - 2\tan^{-1}\left(\frac{b_1 \sin \omega T}{1 - b_1 \cos \omega T}\right)$$

5.7　式 (5.20) を用いて

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = T + 2\frac{T \cdot \frac{d}{d(\omega T)}\left(\frac{b_1 \sin \omega T}{1 - b_1 \cos \omega T}\right)}{1 + \left(\frac{b_1 \sin \omega T}{1 - b_1 \cos \omega T}\right)^2}$$

ここで，

$$\frac{d}{d(\omega T)}\left(\frac{b_1 \sin \omega T}{1 - b_1 \cos \omega T}\right) = \frac{b_1 \cos \omega T - b_1^2}{(1 - b_1 \cos \omega T)^2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \tau(\omega) &= T + 2T\left(\frac{b_1 \cos \omega T - b_1^2}{(1 - b_1 \cos \omega T)^2}\right) \Bigg/ \left(\frac{1 - 2b_1 \cos \omega T + b_1^2}{(1 - b_1 \cos \omega T)^2}\right) \\ &= T + 2T \cdot \frac{b_1 \cos \omega T - b_1^2}{1 - 2b_1 \cos \omega T + b_1^2} \\ &= T \cdot \frac{1 - b_1^2}{1 - 2b_1 \cos \omega T + b_1^2}\end{aligned}$$

5.8　式 (5.48) より $1 = h \cdot \tan\left(\frac{2\pi \cdot 0.15}{2}\right)$，$\therefore\ h = \frac{1}{\tan 0.15\pi} = 1.9626105$

$$H_{\mathrm{A}}(S) = \frac{1}{(S+1)(S^2+S+1)}$$

$\dfrac{1}{S+1}$ を式 (5.49) を用いて双 1 次変換すると，

$$H_1(z) = \frac{1}{h+1} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{h-1}{h+1} z^{-1}\right)} = 0.337540 \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.324920 z^{-1}}$$

$\frac{1}{S^2+S+1}$ を式 (5.50) を用いて双 1 次変換すると，

$$H_2(z) = \frac{B(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 + 2(1 - h^2)Bz^{-1} + (h^2 - h + 1)Bz^{-2}}$$

$$B = \frac{1}{h^2 + h + 1} = 0.146747\ ,\quad 2(1 - h^2)B = -0.836998$$

$$(h^2 - h + 1)B = 0.423986$$

$$\begin{aligned}H(z) &= H_1(z) \cdot H_2(z) \\ &= \frac{0.0495330(1 + z^{-1})^3}{(1 - 0.324920 z^{-1})(1 - 0.836998 z^{-1} + 0.423986 z^{-2})}\end{aligned}$$

5.9 $\tau_0/T=\tau$ と書く．式 (5.75) より，$\mu=3+2\tau$

式 (5.77) を用いて

$$F_3(S)=\cfrac{3+2\tau}{\cfrac{1}{S}+\cfrac{(3+2\tau)^2-1}{\cfrac{3}{S}+\cfrac{(3+2\tau)^2-4}{5}S}}$$

$$=\frac{(3+2\tau)S(15+(5+12\tau+4\tau^2)S^2)}{15+(45+72\tau+24\tau^2)S^2}=\frac{d_0(S)}{d_{\mathrm{e}}(S)} \tag{S5-1}$$

式 (5.74) を用いて

$$H(S)=\frac{h_{\mathrm{A}}(1+S)^3}{15+15(3+2\tau)S+(45+72\tau+24\tau^2)S^2+(3+2\tau)(5+12\tau+4\tau^2)S^3} \tag{S5-2}$$

この式を双 1 次変換すると，

$$\begin{aligned}H(z)=&\frac{h_{\mathrm{A}}\cdot 8}{15(1+z^{-1})^3+(45+30\tau)(1-z^{-1})(1+z^{-1})^2+(45+72\tau+24\tau^2)(1-z^{-1})^2(1+z^{-1})+(15+46\tau+36\tau^2+8\tau^3)(1-z^{-1})^3}\\=&h_{\mathrm{A}}\cdot\frac{2}{B\left(1-\frac{45\tau+33\tau^2+6\tau^3}{B}z^{-1}+\frac{9\tau+21\tau^2+6\tau^3}{B}z^{-2}-\frac{\tau+3\tau^2+2\tau^3}{B}z^{-3}\right)}\end{aligned} \tag{S5-3}$$

ここに

$$\begin{aligned}B&=30+37\tau+15\tau^2+2\tau^3\\&=(\tau+2)(2\tau+5)(\tau+3)\end{aligned} \tag{S5-4}$$

$$\begin{aligned}h&=1+b_1+b_2+b_3\\&=\frac{30}{B}\end{aligned} \tag{S5-5}$$

式 (S5-3) の分母多項式を整理して，

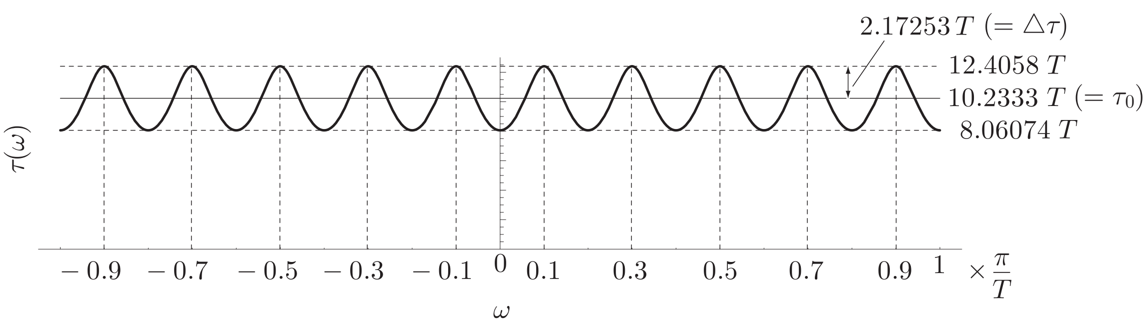
$$
\left.
\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{3\tau}{\tau+2} \\
b_2 &= \frac{3\tau(2\tau+1)}{(\tau+2)(2\tau+5)} \\
b_3 &= -\frac{\tau(2\tau+1)(\tau+1)}{(\tau+2)(2\tau+5)(\tau+3)}
\end{aligned}
\right\} \tag{S5-6}
$$

5.10

$$
\tau(\omega) = T\sum_{i=1}^{5}\left[\frac{1-r^2}{1-2r\cos\{\omega T-(2i-1)\cdot 0.1\pi\}+r^2} + \frac{1-r^2}{1-2r\cos\{\omega T+(2i-1)\cdot 0.1\pi\}+r^2}\right]
$$

$r = 0.8$ とする．

$\tau(\omega)$ の平均値 $\tau_0 = 10.2333 \cdot T$，$\tau(\omega)$ のリプル値 $\Delta\tau = 2.17253 \cdot T$



6章演習問題略解

6.1 **(a)** 図 6.9(a) の左側のシステムは $x(n)$ を a 倍してから間引きするので，式 (6.1) より

$$y_{D_1}(n) = ax(Mn)$$

となる．右側のシステムにおいて，$x_D(n)$ は式 (6.1) より

$$x_D(n) = x(Mn)$$

となり，それを a 倍するので

$$y'_{D_1}(n) = ax(Mn)$$

となる．よって，これらのシステムは等価である．

(b) 同図 (b) の左側のシステムは $x_1(n) + x_2(n)$ を間引きするので

$$y_{D_2}(n) = x_1(Mn) + x_2(Mn)$$

となる．右側のシステムにおいて，式 (6.1) より

$$x_{D_1}(n) = x_1(Mn)$$
$$x_{D_2}(n) = x_2(Mn)$$

となり，これらを加えるので

$$y'_{D_2}(n) = x_1(Mn) + x_2(Mn)$$

となる．よって，これらのシステムは等価である．

(c) 同図 (c) の左側のシステムは $x_1(n) \cdot x_2(n)$ を間引きするので

$$y_{D_3}(n) = x_1(Mn) \cdot x_2(Mn)$$

となる．右側のシステムにおいては

$$x_{D_1}(n) = x_1(Mn)$$
$$x_{D_2}(n) = x_2(Mn)$$

を掛け合わせるので

$$y'_{D_3}(n) = x_1(Mn) \cdot x_2(Mn)$$

となる．よって，これらのシステムは等価である．

6.2 **(a)** 図 6.10(a) の左側のシステムにおいては $ax(n)$ に $L-1$ 個の 0 を挿入するので，式 (6.20) より

$$y_{I_1}(n) = \begin{cases} ax\left(\dfrac{n}{L}\right), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

となる．右側のシステムにおいて， $x_I(n)$ は式 (6.20) に示したように

$$x_I(n) = \begin{cases} x\left(\dfrac{n}{L}\right), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

となり，これを a 倍するので

$$y'_{I_1}(n) = \begin{cases} ax\left(\dfrac{n}{L}\right), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

となる．よって，これらのシステムは等価である．

(b) 同図 (b) の左側のシステムにおいては $x_1(n) + x_2(n)$ に $L-1$ 個の 0 を挿入するので

$$y_{I_2}(n) = \begin{cases} x_1\left(\dfrac{n}{L}\right) + x_2\left(\dfrac{n}{L}\right), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

となる．右側のシステムにおいては，式 (6.20) より

$$x_{I_1}(n) = \begin{cases} x_1\left(\dfrac{n}{L}\right), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

$$x_{I_2}(n) = \begin{cases} x_2\left(\dfrac{n}{L}\right), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

となり，これらを加えるので

$$y'_{I_2}(n) = \begin{cases} x_1\left(\dfrac{n}{L}\right) + x_2\left(\dfrac{n}{L}\right), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

となる．よって，これらのシステムは等価である．

(c) 同図 (c) の左側のシステムにおいては $x_1(n) \cdot x_2(n)$ に $L-1$ 個の 0 を挿入するので

$$y_{I_3}(n) = \begin{cases} x_1\left(\dfrac{n}{L}\right) \cdot x_2\left(\dfrac{n}{L}\right), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

となる．右側のシステムにおいては，式 (6.20) より

$$x_{I_1}(n) = \begin{cases} x_1\left(\dfrac{n}{L}\right), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

$$x_{I_2}(n) = \begin{cases} x_2\left(\dfrac{n}{L}\right), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

となり，これらを掛け合わせるので

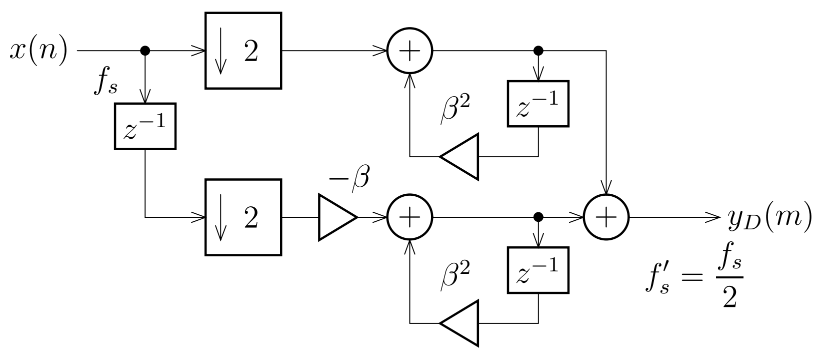
$$y'_{I_3}(n) = \begin{cases} x_1\left(\dfrac{n}{L}\right) \cdot x_2\left(\dfrac{n}{L}\right), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

となる．よって，これらのシステムは等価である．

6.3　タイプ 1 ポリフェーズ成分は

$$E_0(z) = \frac{1}{1 - \beta^2 z^{-1}}$$
$$E_1(z) = \frac{-\beta}{1 - \beta^2 z^{-1}}$$

のように得られるので，図 6.17 の実現を具体的に描くと解図 6.3 のようになる．



解図 6.3

6.4　式 (6.43) は，式 (6.44) と同じく

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 + \beta z^{-1}} \frac{1 - \beta z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2 z^{-2}} + z^{-1} \frac{-\beta}{1 - \beta^2 z^{-2}} \end{aligned}$$

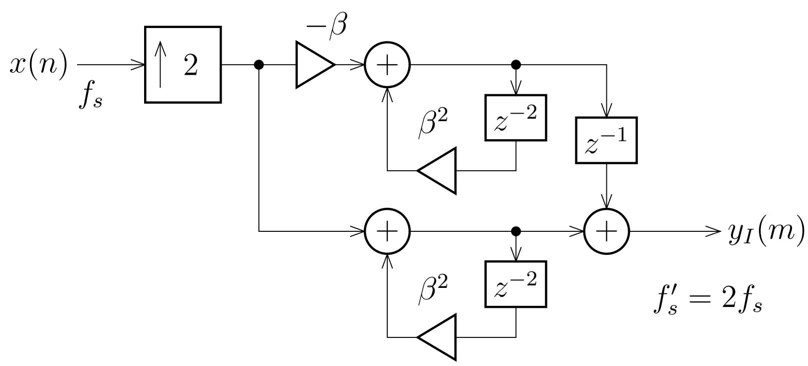
と変形できる．上式の第 2 式はタイプ 1 ポリフェーズ表現である．したがって，式 (6.37) の $E_\ell(z^2)$，$\ell = 0, 1$ は

$$
\begin{aligned}
E_0(z^2) &= \frac{1}{1 - \beta^2 \left(z^2\right)^{-1}} \\
E_1(z^2) &= \frac{-\beta}{1 - \beta^2 \left(z^2\right)^{-1}}
\end{aligned}
$$

となる．よって，タイプ 2 ポリフェーズ成分は

$$
\begin{aligned}
R_0(z) &= E_1(z) = \frac{-\beta}{1 - \beta^2 z^{-1}} \\
R_1(z) &= E_0(z) = \frac{1}{1 - \beta^2 z^{-1}}
\end{aligned}
$$

のように得られる．また，図 6.19 の実現を具体的に描くと解図 6.4 のようになる．

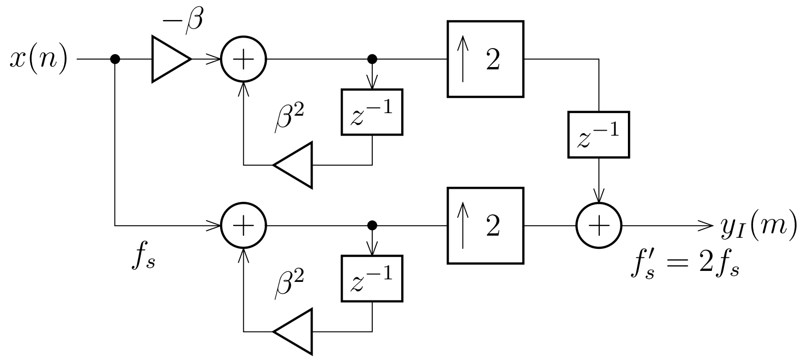


解図 6.4

6.5　タイプ 2 ポリフェーズ成分は

$$
\begin{aligned}
R_0(z) &= \frac{-\beta}{1 - \beta^2 z^{-1}} \\
R_1(z) &= \frac{1}{1 - \beta^2 z^{-1}}
\end{aligned}
$$

のように得られるので，図 6.23 の実現を具体的に描くと解図 6.5 のようになる．



解図 6.5

6.6　式 (6.69)，(6.70) を連立させて $G_0(z)$，$G_1(z)$ を求めると

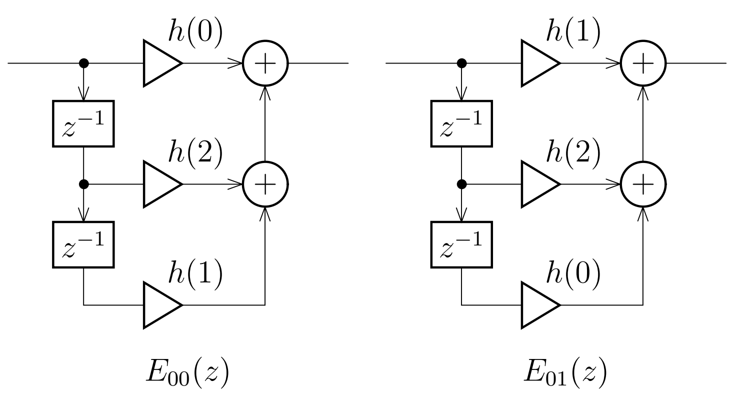
$$G_0(z) = \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{vmatrix} 2z^{-L} & H_1(z) \\ 0 & H_1(-z) \end{vmatrix} = \frac{2z^{-L}H_1(-z)}{\Delta}$$

$$G_1(z) = \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{vmatrix} H_0(z) & 2z^{-L} \\ H_0(-z) & 0 \end{vmatrix} = \frac{-2z^{-L}H_0(-z)}{\Delta}$$

ここに

$$\Delta = \begin{vmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{vmatrix} = H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z)$$

6.7　$H_0(z)$ はタイプ 2 の直線位相多項式であるから，$h(5) = h(0)$，$h(4) = h(1)$，$h(3) = h(2)$ であり，$E_{00}(z^2) = h(0)+h(2)z^{-2}+h(1)z^{-4}$，$E_{01}(z^2) = h(1)+h(2)z^{-2}+h(0)z^{-4}$ である．よって，システムの構成図は図 6.29 において $E_{00}(z)$，$E_{01}(z)$ に解図 6.7 の回路を用いたものとなる．



解図 6.7

7 章演習問題略解

7.1 **(a)**

$$\frac{f_{\mathrm{s}}}{N} = \frac{20}{5} = 4 \quad [\mathrm{kHz}]$$

(b)

$$\frac{f_{\mathrm{s}}}{N} = 2\ , \quad N = \frac{f_{\mathrm{s}}}{2} = 10$$

7.2 **(a)**

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} f(n)\mathrm{e}^{-jkn\frac{2\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{4}\left(f(0) + f(1)\mathrm{e}^{-jk\frac{\pi}{2}} + f(2)\mathrm{e}^{-jk\pi} + f(3)\mathrm{e}^{-jk\frac{3\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(3 + 2\mathrm{e}^{-jk\frac{\pi}{2}} + 2\mathrm{e}^{jk\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(3 + 4\cos k\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$F(0) = \frac{7}{4},\ \ F(1) = \frac{3}{4},\ \ F(2) = -\frac{1}{4},\ \ F(3) = \frac{3}{4}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{k=0}^{3} F(k)\mathrm{e}^{jkn\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\left(7 + 3\mathrm{e}^{jn\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{jn\pi} + 3\mathrm{e}^{jn\frac{3\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(7 + 3\mathrm{e}^{jn\frac{\pi}{2}} - (-1)^n + 3\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(7 - (-1)^n + 6\cos n\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$f(0) = 3,\ \ f(1) = 2,\ \ f(2) = 0,\ \ f(3) = 2$$

7.3 5 点 DFT（式 (7.18) 参照）

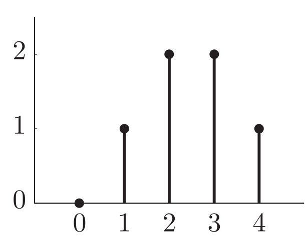
$$F(k) = \frac{1}{5}\left(f(0) + f(1)\mathrm{e}^{-jk\frac{2\pi}{5}} + f(2)\mathrm{e}^{-jk\frac{4\pi}{5}} + f(3)\mathrm{e}^{-jk\frac{6\pi}{5}} + f(4)\mathrm{e}^{-jk\frac{8\pi}{5}}\right)$$

I．数列 (a) の DFT

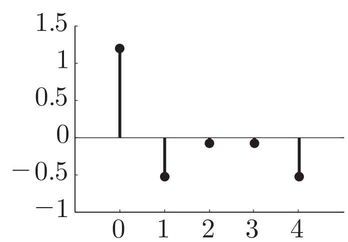
$$
\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{5}\left(f(0) + f(1)\mathrm{e}^{-jk\frac{2\pi}{5}} + f(2)\mathrm{e}^{-jk\frac{4\pi}{5}} + f(3)\mathrm{e}^{jk\frac{4\pi}{5}} + f(4)\mathrm{e}^{jk\frac{2\pi}{5}}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(2\cos k\frac{2\pi}{5} + 4\cos k\frac{4\pi}{5}\right)\\
F(0) &= \frac{6}{5}\\
F(1) &= \frac{1}{5}\left(2\cos\frac{2\pi}{5} + 4\cos\frac{4\pi}{5}\right) = -0.5236\\
F(2) &= \frac{1}{5}\left(2\cos\frac{4\pi}{5} + 4\cos\frac{8\pi}{5}\right) = -0.0764\\
F(3) &= \frac{1}{5}\left(2\cos\frac{6\pi}{5} + 4\cos\frac{12\pi}{5}\right) = F(2)\\
F(4) &= \frac{1}{5}\left(2\cos\frac{8\pi}{5} + 4\cos\frac{16\pi}{5}\right) = F(1)
\end{aligned}
$$

II．数列 (b) の DFT

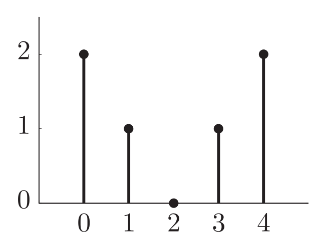
$$
\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{5}\left(2 + \mathrm{e}^{-jk\frac{2\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-jk\frac{6\pi}{5}} + 2\mathrm{e}^{-jk\frac{8\pi}{5}}\right)\\
&= \mathrm{e}^{-jk\frac{4\pi}{5}}\cdot\frac{1}{5}\left(2\mathrm{e}^{jk\frac{4\pi}{5}} + \mathrm{e}^{jk\frac{2\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-jk\frac{2\pi}{5}} + 2\mathrm{e}^{-jk\frac{4\pi}{5}}\right)\\
&= \mathrm{e}^{-jk\frac{4\pi}{5}}\cdot\frac{1}{5}\left(4\cos k\frac{4\pi}{5} + 2\cos k\frac{2\pi}{5}\right)\\
&= \big((a)\text{ の }F(k)\big)\times\mathrm{e}^{-jk\frac{4\pi}{5}}
\end{aligned}
$$



(a) の数列



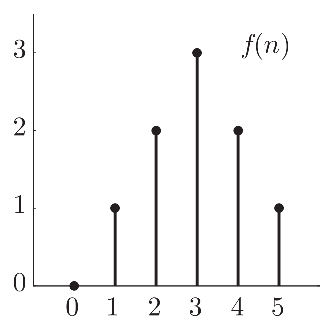
(a) の数列のDFT

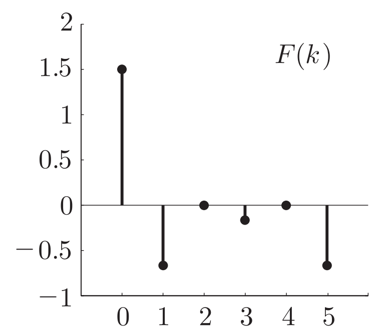


(b) の数列

7.4

$$F(k) = \mathrm{e}^{-jk\frac{3\pi}{3}} \cdot \frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{jk\frac{2\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-jk\frac{2\pi}{3}} + 2\mathrm{e}^{jk\frac{\pi}{3}} + 3 + 2\mathrm{e}^{-jk\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right)$$
$$= (-1)^k \cdot \frac{1}{6}\left(3 + 4\cos k\frac{\pi}{3} + 2\cos k\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$F(0) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$
$$F(1) = -\frac{1}{6}\left(3 + 4\cos\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$
$$F(2) = \frac{1}{6}\left(3 + 4\cos\frac{2\pi}{3} + 2\cos\frac{4\pi}{3}\right) = 0$$
$$F(3) = -\frac{1}{6}(3 + 4\cos\pi + 2\cos 2\pi) = -\frac{1}{6}$$
$$F(4) = \frac{1}{6}\left(3 + 4\cos\frac{4\pi}{3} + 2\cos\frac{8\pi}{3}\right) = 0 = F(2)$$
$$F(5) = -\frac{1}{6}\left(3 + 4\cos\frac{5\pi}{3} + 2\cos\frac{10\pi}{3}\right) = -\frac{2}{3} = F(1)$$





7.5 **I．問 3(a) の数列の離散時間フーリエ級数**

式 (7.12) に $N = 5$ を代入し，

$$f_{\mathrm{p}}(n) = F(-2)\mathrm{e}^{-j2n\frac{2\pi}{5}} + F(-1)\mathrm{e}^{-jn\frac{2\pi}{5}} + F(0) + F(1)\mathrm{e}^{jn\frac{2\pi}{5}} + F(2)\mathrm{e}^{j2n\frac{2\pi}{5}}$$

式 (7.15) より

$F(-2) = F(5-3) = F(2)$，$F(-1) = F(5-1) = F(4) = F(1)$

これより

$$f_{\mathrm{p}}(n) = F(0) + 2F(1)\cos\frac{2n\pi}{5} + 2F(2)\cos\frac{4n\pi}{5}$$
$$= 1.2 - 1.0472\cos\frac{2n\pi}{5} - 0.1528\cos\frac{4n\pi}{5}$$

II．問 4 の数列について

式 (7.12) に $N=6$ を代入し

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{p}}(n) &= \sum_{k=-2}^{3} F(k)\mathrm{e}^{jkn\frac{\pi}{3}} \\
&= F(-2)\mathrm{e}^{-j2n\frac{\pi}{3}} + F(-1)\mathrm{e}^{-jn\frac{\pi}{3}} + F(0) + F(1)\mathrm{e}^{jn\frac{\pi}{3}} + F(2)\mathrm{e}^{j2n\frac{\pi}{3}} + F(3)\mathrm{e}^{j3n\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}
$$

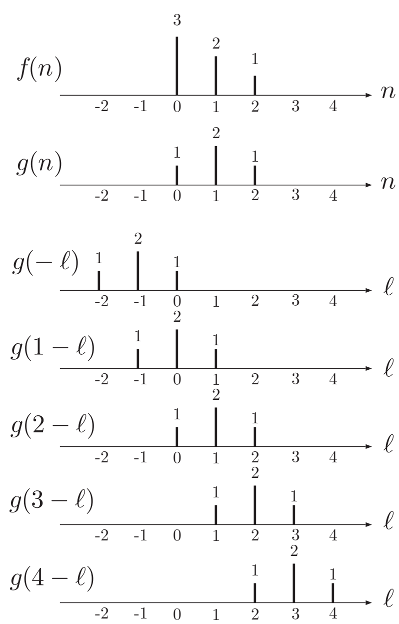
式 (7.15) より

$$
\begin{aligned}
F(-2) &= F(6-2) = F(4) = F(2) = 0 \\
F(-1) &= F(6-1) = F(5) = F(1)
\end{aligned}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{p}}(n) &= F(0) + F(1)\cdot 2\cos\frac{n\pi}{3} + (-1)^n F(3) \\
&= \frac{3}{2} - (-1)^n\frac{1}{6} - \frac{4}{3}\cos\frac{n\pi}{3}
\end{aligned}
$$

7.6 (a) 線形たたみ込み



$$
\begin{aligned}
y(0) &= f(0)\cdot g(0) \\
&= 3\times 1 = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(1) &= f(0)\cdot g(1) + f(1)\cdot g(0) \\
&= 3\times 2 + 2\times 1 = 8
\end{aligned}
$$

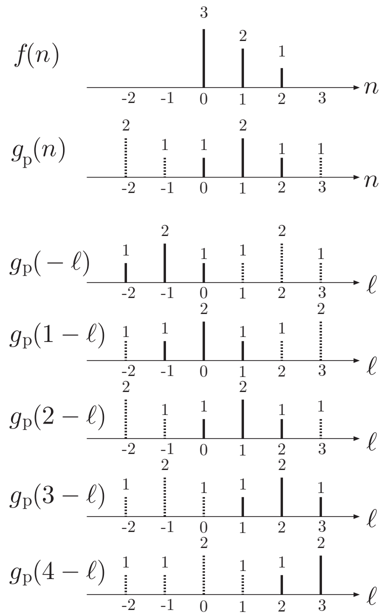
$$
\begin{aligned}
y(2) &= f(0)\cdot g(2) + f(1)\cdot g(1) + f(2)\cdot g(0) \\
&= 3\times 1 + 2\times 2 + 1\times 1 = 8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(3) &= f(1)\cdot g(2) + f(2)\cdot g(1) \\
&= 2\times 1 + 1\times 2 = 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(4) &= f(2)\cdot g(2) \\
&= 1\times 1 = 1
\end{aligned}
$$

$$y(5) = 0$$

(b) 巡回たたみ込み



$k-\ell=n$，$g_{\mathrm{p}}(k-\ell)=g'_{\mathrm{p}}(n)$ と置く．

$$\begin{aligned} y(0) &= f(0)\cdot g'_{\mathrm{p}}(0)+f(1)\cdot g'_{\mathrm{p}}(1)+f(2)\cdot g'_{\mathrm{p}}(2) \\ &= 3\times 1+2\times 1+1\times 2=7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(1) &= f(0)\cdot g'_{\mathrm{p}}(0)+f(1)\cdot g'_{\mathrm{p}}(1)+f(2)\cdot g'_{\mathrm{p}}(2) \\ &= 3\times 2+2\times 1+1\times 1=9 \end{aligned}$$

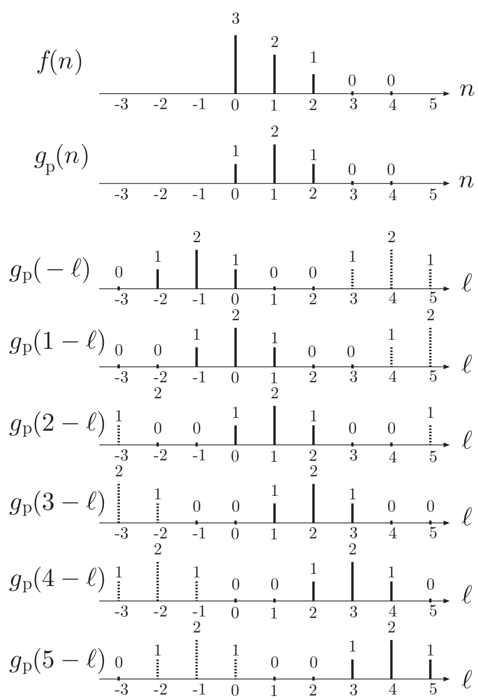
$$\begin{aligned} y(2) &= f(0)\cdot g'_{\mathrm{p}}(0)+f(1)\cdot g'_{\mathrm{p}}(1)+f(2)\cdot g'_{\mathrm{p}}(2) \\ &= 3\times 1+2\times 2+1\times 1=8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(3) &= f(0)\cdot g'_{\mathrm{p}}(0)+f(1)\cdot g'_{\mathrm{p}}(1)+f(2)\cdot g'_{\mathrm{p}}(2) \\ &= 3\times 1+2\times 1+1\times 2=7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(4) &= f(0)\cdot g'_{\mathrm{p}}(0)+f(1)\cdot g'_{\mathrm{p}}(1)+f(2)\cdot g'_{\mathrm{p}}(2) \\ &= 3\times 2+2\times 1+1\times 1=9 \end{aligned}$$

以下
繰り返し

(c) $f(n)$，$g(n)$ の長さを $3+3-1=5$ に伸長して，巡回たたみ込みを行う．



$y(0)=3\times 1=3$

$y(1)=3\times 2+2\times 1=8$

$y(2)=3\times 1+2\times 2+1\times 1=8$

$y(3)=2\times 1+1\times 2=4$

$y(4)=1\times 1=1$

$y(5)=3\times 1=3$

以下
繰り返し

7.7 **(a)** $f(n)=\sin\dfrac{n\pi}{4}$(後に示すサンプリング波形とスペクトルの図参照)

$T=\dfrac{\pi}{4}$，$N=32$，$\Omega=\dfrac{2\pi}{NT}=\dfrac{1}{4}$，$F=\dfrac{\Omega}{2\pi}=\dfrac{1}{8\pi}$，$\Omega T=\dfrac{\pi}{16}$

$F(4)=\dfrac{1}{2j}$，$F(32-4)=-\dfrac{1}{2j}$，他の $F(k)=0$

すなわち，実周波数では単一スペクトルである．

(b) $T = \dfrac{\pi}{4}$, $N = 34$, $\Omega = \dfrac{4}{17}$, $F = \dfrac{2}{17\pi}$

スペクトルは $F(4)$, $F(30)$ にピークを持ち，それより遠ざかるに従い，値が小さくなっているが，(a) と異なり，全帯域に拡がっている．

7.8 $T = \dfrac{\pi}{4}$, $N = 34$, $\Omega = \dfrac{4}{17}$, $F = \dfrac{2}{17\pi}$

ハミング窓の主ローブは中心各周波数より $\pm\dfrac{4\pi}{(N+1)T}$ の間にあり，近似的に $\pm 2\Omega$ の範囲である．図では $F(4)$, $F(30)$ の左，右 2 個ずつのスペクトル以外は極めて小さく（7.7(b) の図の 1/100 以下）なっている．

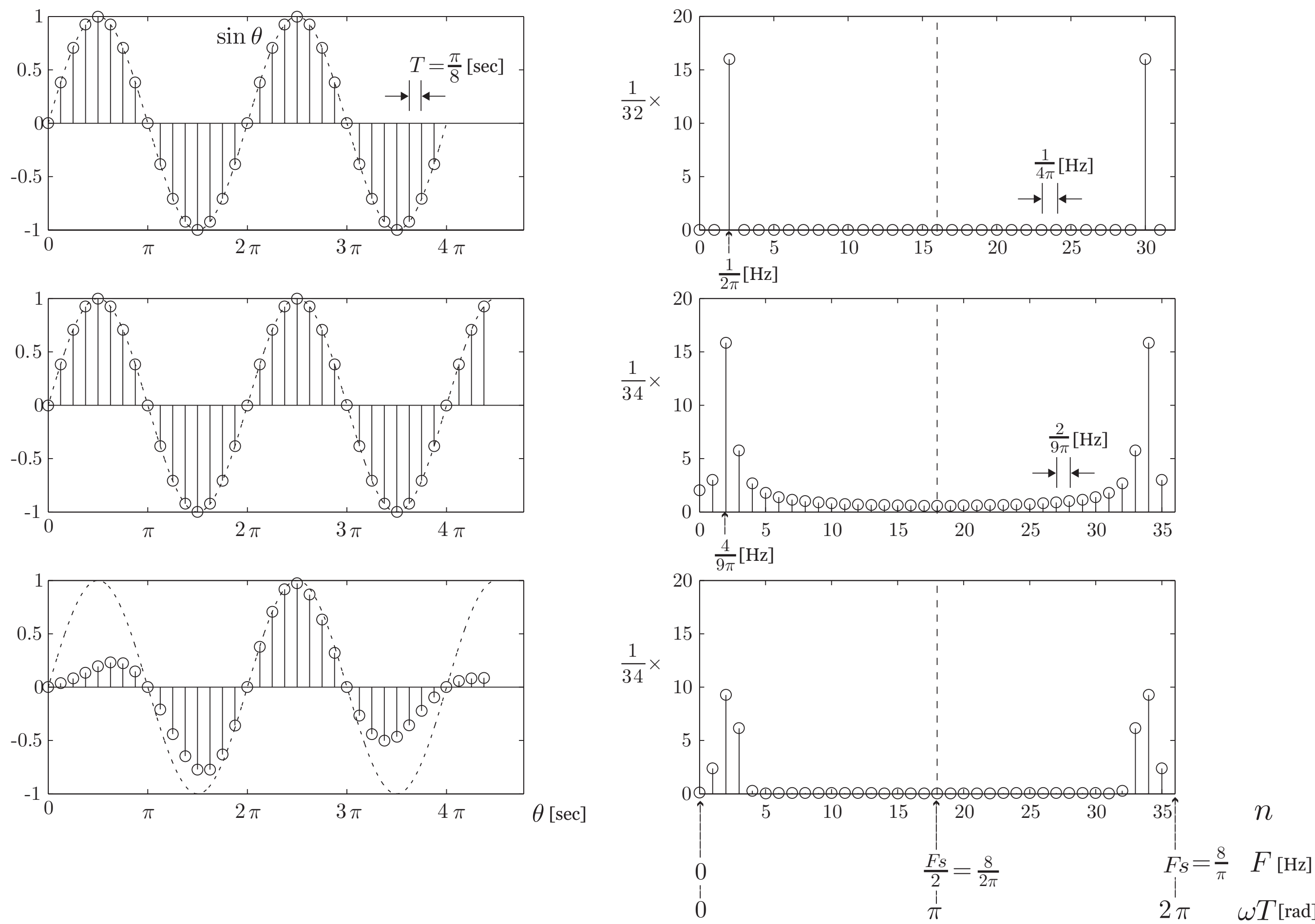
ハミング窓を乗じた系列を一周期とする離散周期系列は周期境界における不連続量が小さいので，スペクトルの拡がりが狭いのである．

[7.7]

(a)

(b)

[7.8]



サンプリング波形　　　　スペクトル

8 章演習問題略解

8.1　図 8.46 より

$$
\begin{aligned}
x(n_1,n_2) = &\ \delta(n_1,n_2) + 2\delta(n_1,n_2-1) \\
&+ 2\delta(n_1-1,n_2) + \delta(n_1-1,n_2-1)
\end{aligned}
$$

と表すことができるので

$$
\begin{aligned}
y(n_1,n_2) = &\ h(n_1,n_2) + 2h(n_1,n_2-1) \\
&+ 2h(n_1-1,n_2) + h(n_1-1,n_2-1)
\end{aligned}
$$

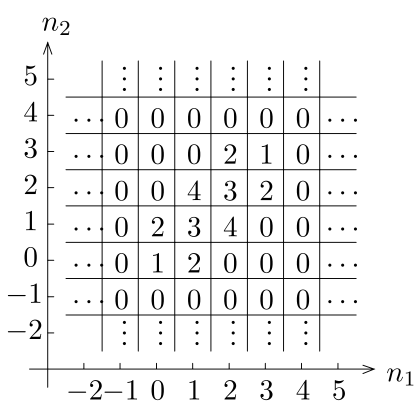
である．よって

$$
\begin{aligned}
y(0,0) &= h(0,0) + 2h(0,-1) + 2h(-1,0) + h(-1,-1) = 1 \\
y(0,1) &= h(0,1) + 2h(0,0) + 2h(-1,1) + h(-1,0) = 2 \\
y(0,2) &= h(0,2) + 2h(0,1) + 2h(-1,2) + h(-1,1) = 0 \\
y(0,3) &= h(0,3) + 2h(0,2) + 2h(-1,3) + h(-1,2) = 0
\end{aligned}
$$

以下同様に

$$
\begin{aligned}
&y(1,0) = 2, \quad y(1,1) = 3, \quad y(1,2) = 4, \quad y(1,3) = 0 \\
&y(2,0) = 0, \quad y(2,1) = 4, \quad y(2,2) = 3, \quad y(2,3) = 2 \\
&y(3,0) = 0, \quad y(3,1) = 0 \quad y(3,2) = 2, \quad y(3,3) = 1
\end{aligned}
$$

が得られ，解図 8.1 のようになる．



解図 8.1

8.2 式 (8.88) より

$$
\begin{aligned}
X(z_1, z_2) &= 1 + 2z_2^{-1} + 2z_1^{-1} + z_1^{-1}z_2^{-1} \\
H(z_1, z_2) &= 1 + 2z_1^{-1}z_2^{-1} + z_1^{-2}z_2^{-2}
\end{aligned}
$$

となる.

8.3 前の問題で求めた $X(z_1, z_2)$ と $H(z_1, z_2)$ より

$$
\begin{aligned}
Y(z_1, z_2) &= H(z_1, z_2)X(z_1, z_2) \\
&= (1 + 2z_1^{-1}z_2^{-1} + z_1^{-2}z_2^{-2}) \cdot (1 + 2z_2^{-1} + 2z_1^{-1} + z_1^{-1}z_2^{-1}) \\
&= 1 + 2z_1^{-1}z_2^{-1} + z_1^{-2}z_2^{-2} + 2z_2^{-1} + 4z_1^{-1}z_2^{-2} + 2z_1^{-2}z_2^{-3} \\
&\quad + 2z_1^{-1} + 4z_1^{-2}z_2^{-1} + 2z_1^{-3}z_2^{-2} + z_1^{-1}z_2^{-1} + 2z_1^{-2}z_2^{-2} + z_1^{-3}z_2^{-3} \\
&= 1 + 2z_2^{-1} + 2z_1^{-1} + 2z_1^{-1} + 3z_1^{-1}z_2^{-1} + 4z_1^{-1}z_2^{-2} \\
&\quad + 4z_1^{-2}z_2^{-1} + 3z_1^{-2}z_2^{-2} + 2z_1^{-2}z_2^{-3} + 2z_1^{-3}z_2^{-2} + z_1^{-3}z_2^{-3}
\end{aligned}
$$

となる.